

入 学 試 験 問 題



数 学

東 北 大 学 2009 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

a, b, c を実数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $a + b = c$ であるとき, $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$ が成り立つことを示せ.

(2) $a + b \geq c$ であるとき, $a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$ が成り立つことを示せ.

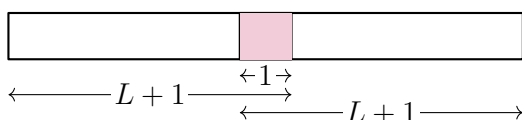
第 2 問

L を 2 以上の自然数, a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする. 縦 1 cm , 横 $(L+1)\text{ cm}$ の長方形の紙を用いて, 次のように長方形 A , B を作る.

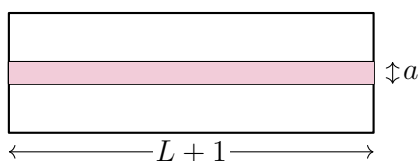
長方形 A の作り方. L 枚の紙を横に並べて, 順に 1 辺 1 cm の正方形をのりしろとして (隣り合う紙が横 1 cm に重なるように) はり合わせ, 縦 1 cm の横長の長方形を作る.

長方形 B の作り方. L 枚の紙を縦に並べて, 隣り合う紙が縦 $a\text{ cm}$ 重なるようにはり合わせて, 横 $(L+1)\text{ cm}$ の長方形を作る.

長方形 A : 横方向に 1 cm 重ねる



長方形 B : 縦方向に $a\text{ cm}$ 重ねる



長方形 A , B の面積をそれぞれ $S_1\text{ cm}^2$ および $S_2\text{ cm}^2$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) S_1 と S_2 を求めよ.
- (2) $L = 2$ のとき, $S_1 - 1 < S_2$ となる a の範囲を求めよ.
- (3) $S_1 - 1 < S_2$ となる 2 以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ.

第 3 問

袋の中に青玉が7個，赤玉が3個入っている．袋から1回につき1個ずつ玉を取り出す．一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ．

- (1) 4回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ．
- (2) 8回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ．
- (3) 赤玉がちょうど8回目ですべて取り出される確率を求めよ．
- (4) 4回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ．

第 4 問

a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 θ に対して $\sin \theta$ と $\sin(\theta - 2a)$ のうち小さくないほうを $f(\theta)$ とおく。すなわち、

$$f(\theta) = \begin{cases} \sin \theta & (\sin \theta \geq \sin(\theta - 2a)), \\ \sin(\theta - 2a) & (\sin \theta < \sin(\theta - 2a)) \end{cases}$$

となる関数 $f(\theta)$ を考える。このとき定積分

$$I = \int_0^\pi f(\theta) d\theta$$

を求めよ。

(2) a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき、(1) の I の最大値を求めよ。

第 5 問

a, b, c, d, p, q は $ad - bc > 0, p > 0, q > 0$ を満たす実数とする. 2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

が

$$APA = P^2$$

を満たすとする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $P^3A = AP^3$ が成り立つことを示せ.

(2) A を p と q で表せ.

第 6 問

実数 a に対して、 x の方程式

$$|x(x-2)| + 2a|x| - 4a|x-2| - 1 = 0$$

が相異なる 4 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)