

東北大学 2009 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a, b, c を実数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $a + b = c$ であるとき, $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$ が成り立つことを示せ.

(2) $a + b \geq c$ であるとき, $a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$ が成り立つことを示せ.

【方針】

(1) は $a + b = c$ をそのまま代入して三乗の展開を使う。(2) は $s = a + b$ とおき, (1) で得られる恒等式 $a^3 + b^3 + 3abs = s^3$ を利用して, 示すべき差を $(s - c)$ でくくる。 $s - c \geq 0$ は仮定から従うので, 残る因子は $ab \leq (a + b)^2/4 = s^2/4$ を使って非負であることを示す。

【解答】

(1)

$a + b = c$ であるから $c^3 = (a + b)^3$ である。右辺を展開すると $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ である。 $a + b = c$ を代入して $c^3 = a^3 + b^3 + 3abc$ となる。よって $a^3 + b^3 + 3abc = c^3$ である。

(2)

$s = a + b$ とおく。仮定より $s \geq c$ である。また (1) の展開から, 任意の実数 a, b について $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$ すなわち $a^3 + b^3 + 3abs = s^3$ が成り立つ。

示すべき差を計算すると

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3abc - c^3 &= (s^3 - 3abs) + 3abc - c^3 \\ &= s^3 - c^3 - 3ab(s - c) \\ &= (s - c)(s^2 + sc + c^2 - 3ab) \end{aligned}$$

である。

ここで $(a - b)^2 \geq 0$ より $(a + b)^2 \geq 4ab$ だから $ab \leq \frac{s^2}{4}$ である。したがって

$$\begin{aligned} s^2 + sc + c^2 - 3ab &\geq s^2 + sc + c^2 - \frac{3s^2}{4} \\ &= \frac{s^2}{4} + sc + c^2 \\ &= \left(\frac{s}{2} + c\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

である。

また $s - c \geq 0$ なので $(s - c)(s^2 + sc + c^2 - 3ab) \geq 0$ である。よって $a^3 + b^3 + 3abc \geq c^3$ が成り立つ。

【総評】 難度 5、計算量 4。三乗の展開を不等式に転用する問題である。 $s = a + b$ とおくことで仮定が $s \geq c$ になり, 差が $(s - c)$ で因数分解される。残りの因子は $ab \leq s^2/4$ で評価するが, これは a, b の正負に関係なく $(a - b)^2 \geq 0$ から従う。目安時間は 15 分前後。

差を $(a + b - c)$ でくくった後の因子は, $((a + b)/2 + c)^2 + 3(a - b)^2/4$ と平方和にも書ける。この形なら第 2 因子の非負性が一目で確認できる。

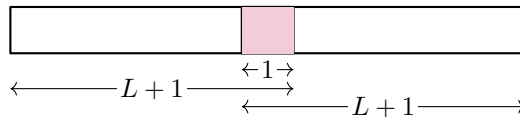
【第 2 問】

L を 2 以上の自然数, a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする. 縦 1 cm, 横 $(L + 1)$ cm の長方形の紙を用いて, 次のように長方形 A , B を作る.

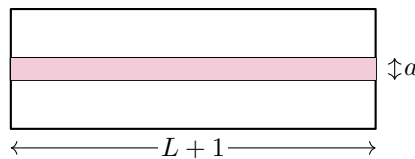
長方形 A の作り方. L 枚の紙を横に並べて, 順に 1 辺 1 cm の正方形をのりしろとして (隣り合う紙が横 1 cm に重なるように) はり合わせ, 縦 1 cm の横長の長方形を作る.

長方形 B の作り方. L 枚の紙を縦に並べて, 隣り合う紙が縦 a cm 重なるようにはり合わせて, 横 $(L + 1)$ cm の長方形を作る.

長方形 A : 横方向に 1 cm 重ねる



長方形 B : 縦方向に a cm 重ねる



長方形 A , B の面積をそれぞれ $S_1 \text{ cm}^2$ および $S_2 \text{ cm}^2$ とおくと, 以下の問いに答えよ.

- (1) S_1 と S_2 を求めよ.
- (2) $L = 2$ のとき, $S_1 - 1 < S_2$ となる a の範囲を求めよ.
- (3) $S_1 - 1 < S_2$ となる 2 以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ.

【方針】

貼り合わせ後の長方形の縦横を, 重なった部分を引いて数える. 長方形 A では横方向に $L - 1$ 回, 幅 1 cm の重なりが生じる. 長方形 B では縦方向に $L - 1$ 回, 幅 a cm の重なりが生じる. (3) では $S_1 - 1 < S_2$ を a の不等式に直し, 右辺 $L/(L^2 - 1)$ が $L \geq 2$ で最大となるのが $L = 2$ であることを使う.

【解答】

(1)

長方形 A では, 横の長さが $L + 1$ cm の紙を L 枚横に並べるので, 重なりを考えなければ横の長さは $L(L + 1)$ cm である. 隣り合う紙は $L - 1$ か所あり, それぞれ横 1 cm ずつ重なるから, 実際の横の長さは $L(L + 1) - (L - 1) = L^2 + 1$ である. 縦の長さは 1 cm なので $S_1 = L^2 + 1$ である.

長方形 B では, 縦 1 cm の紙を L 枚縦に並べ, 隣り合う紙が縦 a cm ずつ重なる. したがって縦の長さは $L - (L - 1)a$ である. 横の長さは $L + 1$ cm なので $S_2 = (L + 1)\{L - (L - 1)a\}$ である.

(2)

$L = 2$ のとき $S_1 - 1 = (2^2 + 1) - 1 = 4$ であり, $S_2 = 3(2 - a)$ である. したがって $S_1 - 1 < S_2$ は $4 < 3(2 - a)$ すなわち $a < \frac{2}{3}$ である. もともと $0 < a < 1$ なので, 求める範囲は $0 < a < \frac{2}{3}$ である.

(3)

(1) より $S_1 - 1 = L^2$ であり, 条件 $S_1 - 1 < S_2$ は $L^2 < (L + 1)\{L - (L - 1)a\}$ である. 右辺を整理すると $L^2 < L(L + 1) - (L^2 - 1)a$ だから $(L^2 - 1)a < L$ である. $L \geq 2$ なので $L^2 - 1 > 0$ であり, $a < \frac{L}{L^2 - 1}$ となる.

ここで $\frac{L}{L^2 - 1} = \frac{L}{(L - 1)(L + 1)}$ は $L \geq 2$ で L が大きくなるほど小さくなる. 実際, $L = 2$ のとき最大で $\frac{2}{2^2 - 1} = \frac{2}{3}$ である. したがって, 条件を満たす 2 以上の自然数 L が存在するための必要十分条件は $0 < a < \frac{2}{3}$ である. よって $0 < a < \frac{2}{3}$ を得る.

【総評】 難度 5, 計算量 5. 紙の重なりを長さから引くだけだが, A では横, B では縦の重なりである点を取り違えないことが重要である. (3) は L ごとの条件 $a < L/(L^2 - 1)$ に直し, 存在条件として右辺の最大値を見る. 目安時間は 15 分前後で, $0 < a < 1$ という初期条件との共通部分まで確認したい.

原図の重なりは隣接する紙の間に $L - 1$ 回だけ生じる。(3) は「ある L が存在」なので、 $L/(L^2 - 1)$ の最大値を取る方向を逆にしないことが重要である。

【第 3 問】

袋の中に青玉が 7 個、赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして、以下の問いに答えよ。

- (1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。
- (2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。
- (3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。
- (4) 4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

前期文系第 3 問と同じく、赤玉 3 個の位置を 10 回の取り出し位置から選ぶと考える。(1) は直接の順序確率、(2)(3) は赤玉の位置集合で数える。(4) は 4 回目までの赤玉の個数を、各回に赤玉が出たかどうかの和として見れば、期待値の加法性により各回の赤玉確率 $3/10$ を足せばよい。

【解答】

(1)

4 回目に初めて赤玉が取り出されるには、最初の 3 回が青玉で、4 回目が赤玉であればよい。よって $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{8}$ である。

(2)

10 回の取り出し位置のうち、赤玉 3 個が現れる位置だけに注目する。赤玉 3 個の位置は全体で ${}_{10}C_3$ 通りあり、どれも同様に確からしい。8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されているためには、赤玉 3 個の位置がすべて 1 回目から 8 回目までに入っていればよい。したがって $\frac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{15}$ である。

(3)

赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出されるとは、8 回目が 3 個目の赤玉であるということである。したがって 8 回目を赤玉の位置として固定し、残り 2 個の赤玉の位置を 1 回目から 7 回目までの中から選べばよい。よって $\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{40}$ である。

(4)

4 回目までに取り出されている赤玉の個数を X とする。 j 回目に赤玉が出たとき 1、そうでないとき 0 をとる変数を X_j とすると $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ である。各回について、その位置に赤玉が来る確率は $\frac{3}{10}$ である。したがって期待値の加法性より $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = 4 \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$ である。

▶ 解法 2 ((4) : 確率分布から期待値を求める)

【方針】

4 回までに出る赤玉の個数を X とし、赤玉 3 個・青玉 7 個から 4 個を選ぶ超幾何型の分布を直接作る．期待値の加法性を使わない検算にもなる．

【解答】

X を 4 回目までに取り出した赤玉の個数とする． $X = k$ となるのは、赤玉 3 個から k 個、青玉 7 個から $4 - k$ 個を選ぶ場合だから

$$\Pr(X = k) = \frac{{}_3C_k {}_7C_{4-k}}{{}_{10}C_4} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

である．したがって

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^3 k \Pr(X = k) \\ &= \frac{1 \cdot {}_3C_1 {}_7C_3 + 2 \cdot {}_3C_2 {}_7C_2 + 3 \cdot {}_3C_3 {}_7C_1}{{}_{10}C_4} \\ &= \frac{252}{210} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

よって (4) の期待値は $\frac{6}{5}$ である．

【総評】 難度 5、計算量 5。赤玉の位置を選ぶ考え方で (2)(3) を統一できる。期待値は分布をすべて出さなくても、各回が赤玉である指示変数の和として処理できるのが重要である。目安時間は 15 分程度で、(3) を「8 回目まで」ではなく「ちょうど 8 回目」と読むことが失点防止になる。

採点点は、(1) の順序確率、(2)(3) の位置集合、(4) の期待値の加法性である．別解の確率分布からも $E(X) = 6/5$ が一致し、相互検算できる．

【第 4 問】

a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 実数 θ に対して $\sin \theta$ と $\sin(\theta - 2a)$ のうち小さくないほうを $f(\theta)$ とおく．すなわち、

$$f(\theta) = \begin{cases} \sin \theta & (\sin \theta \geq \sin(\theta - 2a)), \\ \sin(\theta - 2a) & (\sin \theta < \sin(\theta - 2a)) \end{cases}$$

となる関数 $f(\theta)$ を考える．このとき定積分

$$I = \int_0^\pi f(\theta) d\theta$$

を求めよ．

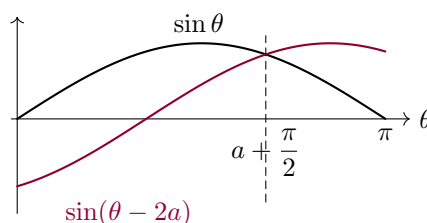
(2) a を $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき、(1) の I の最大値を求めよ．

▶ 解法 1

【方針】

どちらの正弦が大きいかは差 $\sin \theta - \sin(\theta - 2a)$ を積和公式で調べる． $0 \leq a \leq \pi/2$ では符号は $\cos(\theta - a)$ で決まり、切り替わりは $\theta = a + \pi/2$ である．そこで積分区間を 2 つに分けて $I(a)$ を求める．最大化は $s = \sin a$ と置いて、 $I = 2 + 2s - 2s^2$ という下に開く 2 次式の最大に帰着する．

【解答】



模式図 ($a > 0$). 破線の位置で大きい方の曲線が切り替わる.

(1)

2つの関数の差を調べると $\sin \theta - \sin(\theta - 2a) = 2 \cos(\theta - a) \sin a$ である. $0 \leq a \leq \pi/2$ なので $\sin a \geq 0$ である. したがって, $a = 0$ では2つは等しく, $a > 0$ では大小は $\cos(\theta - a)$ の符号で決まる.

$0 \leq \theta \leq \pi$ において, $\cos(\theta - a) \geq 0$ となるのは $0 \leq \theta \leq a + \frac{\pi}{2}$ である. よって

$$f(\theta) = \begin{cases} \sin \theta & \left(0 \leq \theta \leq a + \frac{\pi}{2}\right), \\ \sin(\theta - 2a) & \left(a + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right) \end{cases}$$

である. したがって

$$I = \int_0^{a+\pi/2} \sin \theta \, d\theta + \int_{a+\pi/2}^{\pi} \sin(\theta - 2a) \, d\theta$$

である.

計算すると

$$\int_0^{a+\pi/2} \sin \theta \, d\theta = 1 - \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sin a$$

であり,

$$\begin{aligned} \int_{a+\pi/2}^{\pi} \sin(\theta - 2a) \, d\theta &= [-\cos(\theta - 2a)]_{a+\pi/2}^{\pi} \\ &= -\cos(\pi - 2a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \\ &= \cos 2a + \sin a \end{aligned}$$

である. よって $I = 1 + 2 \sin a + \cos 2a = 2 + 2 \sin a - 2 \sin^2 a$ である. したがって $I = 2 + 2 \sin a - 2 \sin^2 a$ である.

(2)

$s = \sin a$ とおく. $0 \leq a \leq \pi/2$ より $0 \leq s \leq 1$ であり, (1) の結果は $I = 2 + 2s - 2s^2$ となる. 平方完成すると $I = \frac{5}{2} - 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2$ である. したがって最大となるのは $s = \frac{1}{2}$ すなわち $a = \frac{\pi}{6}$ のときであり, 最大値は $\frac{5}{2}$ である.

▶ 解法 2 (最大値の公式を使う)

【方針】

2数の大きい方を $\max(u, v) = (u + v + |u - v|)/2$ と表す. 絶対値の符号が変わる位置だけで積分を分ければ, 同じ $I(a)$ が得られる.

【解答】

(1) 2数 u, v の大きい方は

$$\max(u, v) = \frac{u + v + |u - v|}{2}$$

だから,

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta + \sin(\theta - 2a) + |\sin \theta - \sin(\theta - 2a)|}{2}.$$

ここで

$$\sin \theta - \sin(\theta - 2a) = 2 \sin a \cos(\theta - a).$$

$0 \leq a \leq \pi/2$ なので, $[0, \pi]$ で絶対値の符号が変わるのは

$$\theta = a + \frac{\pi}{2}$$

である. したがって

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \{\sin \theta + \sin(\theta - 2a)\} \, d\theta \\ &\quad + \sin a \left\{ \int_0^{a+\pi/2} \cos(\theta - a) \, d\theta - \int_{a+\pi/2}^{\pi} \cos(\theta - a) \, d\theta \right\} \\ &= 2 + 2 \sin a - 2 \sin^2 a. \end{aligned}$$

(2) $s = \sin a$ ($0 \leq s \leq 1$) とおくと

$$I = 2 + 2s - 2s^2 = \frac{5}{2} - 2 \left(s - \frac{1}{2} \right)^2.$$

よって $s = 1/2$, すなわち $a = \pi/6$ のとき最大であり,

$$\max I = \frac{5}{2}$$

である.

【総評】 難度 7、計算量 6。2 つの正弦の大きい方を積分するため、差の符号で区間を切るのが核心である。切り替わりは $\theta = a + \pi/2$ であり、ここを誤ると積分値も最大値も変わる。最大値は端点ではなく $\sin a = 1/2$ で生じる。目安時間は 25 分前後で、積分区間と最大化の変数範囲を明記したい。

積分は切替点を明示して 2 本に分ける。最大化では $s = \sin a$ が $[0, 1]$ 全体を動くことと、 $s = 1/2$ に対応する $a = \pi/6$ を書く。

【第 5 問】

a, b, c, d, p, q は $ad - bc > 0, p > 0, q > 0$ を満たす実数とする。2 つの行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

が

$$APA = P^2$$

を満たすとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $P^3 A = AP^3$ が成り立つことを示せ。

(2) A を p と q で表せ。

【方針】

$APA = P^2$ を成分で比較する。非対角成分から $b(pa + qd) = 0, c(pa + qd) = 0$ が得られるので、まず $pa + qd = 0$ の場合が行列式条件 $ad - bc > 0$ に反することを示す。すると $b = c = 0$ が従い、 A と P は対角行列になる。(2) では対角成分から $a^2 = p, d^2 = q$ を得て、 $ad > 0$ により符号が同じであることを使う。

【解答】

(1)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

である。 APA を計算すると

$$APA = \begin{pmatrix} pa^2 + qbc & b(pa + qd) \\ c(pa + qd) & pbc + qd^2 \end{pmatrix}$$

である。一方

$$P^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}$$

なので、非対角成分から $b(pa + qd) = 0, c(pa + qd) = 0$ が成り立つ。

ここで $pa + qd = 0$ と仮定する。このとき $d = -pa/q$ である。また左上成分の等式 $pa^2 + qbc = p^2$ より $bc = \frac{p^2 - pa^2}{q}$ である。したがって $ad - bc = a \left(-\frac{pa}{q} \right) - \frac{p^2 - pa^2}{q} = -\frac{p^2}{q} < 0$ となり、仮定 $ad - bc > 0$ に反する。よって $pa + qd \neq 0$ である。したがって $b = 0, c = 0$ である。

すると A も P も対角行列であるから、対角成分同士の積は順序を入れ替えても同じであり、 $P^3 A = AP^3$ が成り立つ。

(2)

(1) より $b = c = 0$ である。 $APA = P^2$ の対角成分を比較すると $pa^2 = p^2$, $qd^2 = q^2$ である。 $p > 0$, $q > 0$ より $a^2 = p$, $d^2 = q$ である。また $ad - bc = ad > 0$ なので, a と d は同符号である。したがって

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A = \begin{pmatrix} -\sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{q} \end{pmatrix}$$

である。逆に, これらの行列はいずれも $ad - bc > 0$ かつ $APA = P^2$ を満たす。

【総評】 難度 7、計算量 7。成分比較自体は機械的だが, $pa + qd = 0$ の可能性を行列式条件で排除する部分が山場である。そこを曖昧にすると $b = c = 0$ が結論できない。(2) では a, d が同符号でなければ $ad > 0$ を満たさないため, 符号の組を 2 通りに絞る。目安時間は 22 分前後。

採点点は, 非対角成分だけで直ちに $b = c = 0$ とせず, $pa + qd = 0$ の可能性を行列式条件で排除すること, 最後に 2 つの符号が同じであることを確認する点である。

【第 6 問】

実数 a に対して, x の方程式

$$|x(x-2)| + 2a|x| - 4a|x-2| - 1 = 0$$

が相異なる 4 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

【方針】

絶対値の符号が変わる $x = 0, 2$ で 3 区間に分ける。各区間の二次式について端点の符号・頂点・判別式から根数を決め, 区間端の重複と重解を除いて合計が 4 になる a を拾う。

【解答】

$$F(x) = |x(x-2)| + 2a|x| - 4a|x-2| - 1$$

とおく。絶対値を外すと

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + (2a-2)x - 8a - 1 & (x < 0), \\ -x^2 + (2+6a)x - 8a - 1 & (0 \leq x < 2), \\ x^2 - (2+2a)x + 8a - 1 & (x \geq 2). \end{cases}$$

区間端の値は

$$F(0) = -8a - 1, \quad F(2) = 4a - 1$$

である。

$x < 0$ にある根

この区間の二次式は $x \rightarrow -\infty$ で正となる。 $F(0) < 0$, すなわち

$$a > -\frac{1}{8}$$

のとき, $x < 0$ にちょうど 1 根をもつ。それ以外では 0 根である。

$0 \leq x < 2$ にある根

中央の二次式の判別式は

$$\Delta_0 = 4a(9a - 2)$$

である。下を開くことと端点の符号を合わせると, 根数は

a	$\left(-\frac{1}{8}, 0\right)$	$\left(0, \frac{2}{9}\right)$	$\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$
根数	2	0	2	1

となる。境界では, $a = 0$ で $x = 1$ が重解, $a = 2/9$ で重解, $a = -1/8$ では $x = 0$, $a = 1/4$ では $x = 2$ が根になる。

$x \geq 2$ にある根

$a < 1/4$ では $F(2) < 0$ で, $x \rightarrow \infty$ では正だから 1 根をもつ. $a > 1/4$ では, 頂点 $x = a + 1$ がこの区間に入る $a \geq 1$ の場合だけ 2 根の可能性があり, 判別式は

$$\Delta_2 = 4(a^2 - 6a + 2)$$

なので, $a \geq 1$ のもとで 2 根をもつ条件は

$$a > 3 + \sqrt{7}.$$

$a = 3 + \sqrt{7}$ では重解であり, 相異なる根は 1 個である.

以上を合計すると,

a	$\left(-\frac{1}{8}, 0\right)$	$\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{4}\right)$	$(3 + \sqrt{7}, \infty)$
$x < 0$	1	1	1
$0 \leq x < 2$	2	2	1
$x \geq 2$	1	1	2
合計	4	4	4

である. したがって求める範囲は

$$-\frac{1}{8} < a < 0, \quad \frac{2}{9} < a < \frac{1}{4}, \quad a > 3 + \sqrt{7}$$

である.

【総評】 難度 7、計算量 7。絶対値を 3 区間で外すだけでなく, 各区間に入る根の個数を端点込みで丁寧に数える必要がある。特に $a > 3 + \sqrt{7}$ では右側の 2 次式が $x \geq 2$ に 2 根をもつため, この範囲を落としやすい。端点 $a = -1/8, 0, 2/9, 1/4, 3 + \sqrt{7}$ では根が端点や重解になり, 相異なる 4 根にはならない。目安時間は 25 分前後。

根数表では区間端 $x = 0, 2$ を一方だけに含めて重複を防ぐ. $a = 0$ と $a = 3 + \sqrt{7}$ では重解, $a = -1/8, 1/4$ では区間端の根が生じるため, いずれも 4 個の相異なる解にはならない.