

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2010 年 度 文 系 （後 期）

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

n を 2 以上の自然数とする. $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ は $x_1 > x_2 > \dots > x_n, y_1 > y_2 > \dots > y_n$ を満たす実数とする. $z_1, \dots, z_n$ は $y_1, \dots, y_n$ を任意に並べ替えたものとするとき,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのはどのようなときか答えよ.

第 2 問

$\triangle OAB$ において、辺 OA を $1:1$ に内分する点を M ，辺 OB を $2:1$ に内分する点を N とし、線分 AN と線分 BM の交点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2) $|\overrightarrow{OA}| = 1$ とする。辺 OA を含む直線を l ，辺 OB を含む直線を m とする。 $\triangle ABP$ の外接円が l ， m に接するとき、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めよ。

第 3 問

n を 2 以上の自然数とし、1 回の対戦で勝つ確率が $\frac{1}{2}$ のチームが n 回試合をする。以下の問いに答えよ。

(1) 第 1 試合から連勝する回数 (0 回, 1 回も含む) の期待値を求めよ。

(2) 最初の k 試合 ($1 \leq k \leq n$) における勝ち試合数を t_k として、 $a_k = \frac{t_k}{k}$ とおく。 $1 \leq m \leq n-1$ として、

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m, a_m > a_{m+1}$$

となる確率 p_m を求めよ。

(3) $\sum_{m=1}^{n-1} mp_m$ を求めよ。

第 4 問

xy 平面の点 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 4)$ を結んでできる折れ線をグラフとする関数を $y = f(x)$ とおく．このとき，積分

$$\int_{-1}^1 \{f(x) - (a|x| + b)\}^2 dx$$

を最小にする a , b を求めよ．また，そのときの積分の値を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)