

東北大学 2010 年度 文系（後期）

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

n を 2 以上の自然数とする. $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ は $x_1 > x_2 > \dots > x_n, y_1 > y_2 > \dots > y_n$ を満たす実数とする. $z_1, \dots, z_n$ は $y_1, \dots, y_n$ を任意に並べ替えたものとするとき,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのはどのようなときか答えよ.

▶ 解法 1

【方針】

並べ替え $z_1, \dots, z_n$ に, 大きい順になっていない隣接または 2 項の逆転があれば, その 2 つを入れ替えることで 2 乗和が小さくなることを示す. これを繰り返すと $z_i = y_i$ の順に到達し, そのときが最小である. 等号条件は, x_i も y_i もすべて厳密に減少しているため, 1 回でも逆転交換が必要なら和が厳密に減ることから判定する.

【解答】

$z_1, \dots, z_n$ が $y_1, \dots, y_n$ の並べ替えであるとする. もし $i < j$ で $z_i < z_j$ となる組があれば, z_i と z_j は大きい順に並んでいない.

この 2 つだけを入れ替えたときの 2 乗和の変化を調べる. 入れ替える前の該当部分は $(x_i - z_i)^2 + (x_j - z_j)^2$ であり, 入れ替えた後は $(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2$ である. 差を取ると $\{(x_i - z_i)^2 + (x_j - z_j)^2\} - \{(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2\} = 2(x_i - x_j)(z_j - z_i)$. ここで $i < j$ より $x_i > x_j$ であり, また仮定より $z_j > z_i$ である. したがって $2(x_i - x_j)(z_j - z_i) > 0$ である. つまり, このような逆転を入れ替えると, 2 乗和は厳密に小さくなる.

この操作を繰り返すと, $z_1, z_2, \dots, z_n$ は大きい順に並ぶ. $y_1 > y_2 > \dots > y_n$ であり, z_i は y_i の並べ替えなので, 最終的には $z_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) となる. この過程で和は増えず, 逆転があれば厳密に小さくなる. したがって $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$ が成り立つ.

等号について考える. もし z_i が y_i と同じ順でなければ, ある $i < j$ について $z_i < z_j$ となる逆転が存在し, 上の交換で 2 乗和が厳密に小さくなる. したがって等号は成り立たない.

よって等号が成り立つのは, はじめから $z_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) であるとき, かつそのときに限られる.

▶ 解法 2（内積和へ帰着）

【方針】

両辺の平方和を展開する. z_i は y_i の並べ替えなので定数部分は一致し, 問題は $\sum x_i y_i$ が $\sum x_i z_i$ 以上であることへ帰着する. 最大の y_1 を先頭へ移す交換を繰り返し, 帰納的に順序を確定する.

【解答】

まず

$$\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$

を展開する. $z_1, \dots, z_n$ は $y_1, \dots, y_n$ の並べ替えだから

$$\sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

であり,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i z_i \right).$$

そこで右辺の括弧が非負であることを示す. 並び $z_1, \dots, z_n$ の中で最大の数 y_1 が第 k 項にあるとする. $k > 1$ なら $z_1 < y_1$

である。 z_1 と $z_k = y_1$ を交換したとき、和 $\sum x_i z_i$ の増加量は

$$x_1 y_1 + x_k z_1 - (x_1 z_1 + x_k y_1) = (x_1 - x_k)(y_1 - z_1) > 0$$

である。よって最大値を与える並びでは必ず $z_1 = y_1$ でなければならない。

残る $n-1$ 項にも同じ議論を順に適用すると、 $\sum x_i z_i$ が最大となるのは

$$z_i = y_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

のときだけである。したがって

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \sum_{i=1}^n x_i z_i.$$

これを最初に展開した差の式へ戻せば、求める不等式を得る。

また x_i, y_i はいずれも狭義減少列なので、順序が 1 か所でも異なれば上の交換で和は厳密に増える。よって等号成立は

$$z_i = y_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

のとき、かつそのときに限る。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 25 分程度で、いわゆる並べ替えの不等式を 2 乗和の形で証明する問題である。全体を一度に比較するのではなく、逆順の 2 項を入れ替えたときの差を計算するのが最も安全である。 x_i と y_i がともに厳密な減少列なので、逆転があると差は必ず正になり、等号条件も一意に決まる。

【第 2 問】

$\triangle OAB$ において、辺 OA を $1:1$ に内分する点を M 、辺 OB を $2:1$ に内分する点を N とし、線分 AN と線分 BM の交点を P とする。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2) $|\overrightarrow{OA}| = 1$ とする。辺 OA を含む直線を l 、辺 OB を含む直線を m とする。 $\triangle ABP$ の外接円が l, m に接するとき、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は AN 上と BM 上の 2 通りで P を表し、係数比較で交点を求める。(2) は座標を入れて、 $A = (1, 0), B = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおく。外接円が直線 OA, OB に接するなら接点はそれぞれ A, B であり、中心から接点への半径が各直線に垂直になる。この条件からまず $OB = 1$ を導き、さらに P が円周上にある条件で内積を求める。

【解答】

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。 M は OA の中点だから $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}$ であり、 N は OB を $2:1$ に内分する点だから $\overrightarrow{ON} = \frac{2}{3}\vec{b}$ である。

点 P は線分 AN 上にあるので、ある実数 s を用いて $\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + s \cdot \frac{2}{3}\vec{b}$ と表せる。また P は線分 BM 上にもあるので、ある実数 t を用いて $\overrightarrow{OP} = t \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ と表せる。

係数を比較すると $1-s = \frac{t}{2}$, $\frac{2s}{3} = 1-t$ である。第 1 式から $t = 2(1-s)$ であり、これを第 2 式に代入すると $\frac{2s}{3} = 1 - 2(1-s) = 2s - 1$ である。したがって $2s = 6s - 3$, $s = \frac{3}{4}$ である。よって

$$\overrightarrow{OP} = \left(1 - \frac{3}{4}\right)\vec{a} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

したがって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

である。

(2) 座標を入れて計算する。 $|\vec{OA}| = 1$ なので $A = (1, 0)$ とおく。また $B = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ とおく。ここで $r = OB$ である。 $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ と書けば $B = (rc, rs)$ である。

外接円は点 A, B を通る。さらに直線 OA に接するので、接点は A であり、円の中心を S とすると $SA \perp OA$ である。同様に、直線 OB に接するので接点は B であり、 $SB \perp OB$ である。

半径は同じだから $SA = SB$ である。直角三角形 OAS と OBS を見ると $OS^2 = OA^2 + SA^2 = 1 + SA^2$ であり、また $OS^2 = OB^2 + SB^2 = r^2 + SB^2$ である。 $SA = SB$ より $1 = r^2$ となる。 $r > 0$ だから $r = 1$ である。

したがって $B = (c, s)$ である。円の中心は $SA \perp OA$ より $S = (1, h)$ とおける。また $SB \perp OB$ より $(S - B) \cdot B = 0$ である。すなわち $(1 - c, h - s) \cdot (c, s) = 0$ なので $c(1 - c) + s(h - s) = 0$ 。 $c^2 + s^2 = 1$ を用いると $c + hs - 1 = 0$ であり、 $h = \frac{1 - c}{s}$ である。

(1) より $P = \frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B = \left(\frac{1}{4} + \frac{c}{2}, \frac{s}{2}\right)$ である。 P が外接円上にあるためには $SP^2 = SA^2 = h^2$ であればよい。左辺から右辺を引くと

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{c}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{s}{2} - h\right)^2 - h^2 = \frac{4c^2 + 4c + 4s^2 - 7}{16}.$$

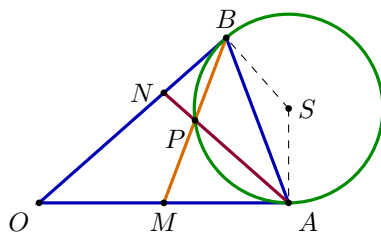
$c^2 + s^2 = 1$ より、これは $\frac{4c - 3}{16}$ である。したがって $4c - 3 = 0$, $c = \frac{3}{4}$ である。

求める内積は

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |OA||OB| \cos \theta = 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

である。

【交点と接円の配置】



外接円は直線 OA, OB にそれぞれ A, B で接する。

▶ 解法 2 (円の方程式)

【方針】

(1) は 2 本の中線型の線分を係数表示する。(2) では円をベクトル方程式 $|\vec{x}|^2 + \vec{c} \cdot \vec{x} + d = 0$ とおき、 A, B における接線方向がそれぞれ $\vec{OA}, \vec{OB}$ である条件を使う。円周上の点 P を代入すれば内積が直接決まる。

【解答】

(1)

$$\vec{OA} = \vec{a}, \quad \vec{OB} = \vec{b}$$

とおく。 $P \in AN$ より

$$\vec{OP} = (1 - s)\vec{a} + \frac{2s}{3}\vec{b},$$

$P \in BM$ より

$$\vec{OP} = \frac{t}{2}\vec{a} + (1 - t)\vec{b}$$

と書ける。係数比較から

$$1 - s = \frac{t}{2}, \quad \frac{2s}{3} = 1 - t$$

であり、 $s = 3/4$ を得る。したがって

$$\vec{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

(2) 円上の点を表すベクトルを $\vec{x}$ とし、外接円の方程式を

$$|\vec{x}|^2 + \vec{c} \cdot \vec{x} + d = 0$$

とおく。ここで $|\vec{a}| = 1$ である。

円は直線 OA に A で接する。したがって (2) の A における法線ベクトル $2\vec{a} + \vec{c}$ は $\vec{a}$ と直交するので

$$(2\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = -2.$$

さらに A をこの円の方程式に代入すると

$$1 - 2 + d = 0, \quad d = 1.$$

同様に、 B における接線方向は $\vec{b}$ だから

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = -2|\vec{b}|^2.$$

これと B を円の方程式に代入した式、さらに $d = 1$ を合わせると

$$|\vec{b}|^2 - 2|\vec{b}|^2 + 1 = 0, \quad |\vec{b}| = 1.$$

$q = \vec{a} \cdot \vec{b}$ とおく。(1) で求めた $\vec{OP}$ より

$$\vec{p} = \vec{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$d = 1$ と $|\vec{b}| = 1$ を用いると

$$|\vec{p}|^2 = \frac{5}{16} + \frac{q}{4}, \quad \vec{c} \cdot \vec{p} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}.$$

P も円周上なので円の方程式に代入して

$$\frac{5}{16} + \frac{q}{4} - \frac{3}{2} + 1 = 0.$$

よって

$$q = \frac{3}{4}.$$

したがって

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{3}{4}$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 6。目安時間は 28 分程度で、前半の交点ベクトルと後半の円の接線条件をつなぐ問題である。(1) は AN と BM の 2 表現を係数比較するだけだが、(2) では外接円が直線 OA, OB に接するため接点が A, B になることを明確にする必要がある。中心から接点への半径が直線に垂直であることを使うと、まず $OB = 1$ が出て、残りは P が円周上にある条件の計算に集中できる。

【第 3 問】

n を 2 以上の自然数とし、1 回の対戦で勝つ確率が $\frac{1}{2}$ のチームが n 回試合をする。以下の問いに答えよ。

(1) 第 1 試合から連勝する回数 (0 回, 1 回も含む) の期待値を求めよ。

(2) 最初の k 試合 ($1 \leq k \leq n$) における勝ち試合数を t_k として、 $a_k = \frac{t_k}{k}$ とおく。 $1 \leq m \leq n-1$ として、

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m, a_m > a_{m+1}$$

となる確率 p_m を求めよ。

(3) $\sum_{m=1}^{n-1} mp_m$ を求めよ。

【方針】

(1) は連勝回数 X について、期待値を $P(X \geq k)$ の和で求める。(2) は勝ちを 1, 負けを 0 として、平均勝率 a_k が増加し続ける条件を調べる。途中で負けが出てよいのはそれまで勝ちが 0 の間だけなので、最初の m 試合は「負けが続いた後に勝ちが続く」形に限られる。最後に第 $m+1$ 試合で平均が下がる条件を加える。(3) は得られた有限和を差分または既知の等比和で計算する。

【解答】

(1) 第 1 試合からの連勝回数を X とする。 $X \geq k$ であることは、第 1 試合から第 k 試合まですべて勝つことと同値である。したがって $P(X \geq k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($1 \leq k \leq n$) である。

非負整数値をとる確率変数について $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$ であるから

$$E(X) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/2\{1 - (1/2)^n\}}{1 - 1/2} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

よって $1 - \frac{1}{2^n}$ である。

(2) 各試合について、勝ちを 1, 負けを 0 で表す。第 k 試合までの勝ち数を t_k とすると $a_k = \frac{t_k}{k}$ である。

第 $k+1$ 試合の結果を ε とする。ここで $\varepsilon = 1$ なら勝ち, $\varepsilon = 0$ なら負けである。条件 $a_k \leq a_{k+1}$ は $\frac{t_k}{k} \leq \frac{t_k + \varepsilon}{k+1}$ である。両辺に $k(k+1) > 0$ を掛けると $(k+1)t_k \leq k(t_k + \varepsilon)$ すなわち $t_k \leq k\varepsilon$ である。

もし第 $k+1$ 試合が勝ちなら $\varepsilon = 1$ であり, $t_k \leq k$ は常に成り立つ。もし第 $k+1$ 試合が負けなら $\varepsilon = 0$ であり, 条件は $t_k = 0$ となる。つまり, 平均勝率が下がらないまま負けが出ることができるのは, それまで 1 勝もしていない場合だけである。

したがって $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_m$ となるためには, 最初の m 試合が

$$\underbrace{L \cdots L}_{r \text{ 回}} \underbrace{W \cdots W}_{m-r \text{ 回}}$$

という形でなければならない。ただし $r = 0, 1, \dots, m$ である。

さらに $a_m > a_{m+1}$ となるには, 第 $m+1$ 試合が負けであり, かつ最初の m 試合までに少なくとも 1 勝している必要がある。したがって上の形で $r = 0, 1, \dots, m-1$ の m 通りが可能であり, 第 $m+1$ 試合は負けに固定される。

よって $p_m = \frac{m}{2^{m+1}}$ である。すなわち $p_m = \frac{m}{2^{m+1}}$ である。

(3) (2) より $\sum_{m=1}^{n-1} mp_m = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m^2}{2^{m+1}}$ である。この和を $S_N = \sum_{m=1}^N \frac{m^2}{2^{m+1}}$ とおく。等比数列の和を 2 回利用して整理すると $S_N = 3 - \frac{N^2 + 4N + 6}{2^{N+1}}$ である。ここで $N = n-1$ とすれば

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{m^2}{2^{m+1}} = 3 - \frac{(n-1)^2 + 4(n-1) + 6}{2^n} = 3 - \frac{n^2 + 2n + 3}{2^n}.$$

したがって $\sum_{m=1}^{n-1} mp_m = 3 - \frac{n^2 + 2n + 3}{2^n}$ である。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安時間は 30 分程度で、(2) の平均勝率列の条件を勝敗列の形に翻訳できるかが差になる。(1) は連勝回数の期待値を「少なくとも k 回連勝」の確率で足すと簡潔である。(2) では、負けても平均が下がらないのはそれまで勝ち数が 0 のときだけ、という観察が中心である。(3) の有限和は最後の添字を $N = n - 1$ としてから代入すると、分子の整理ミスを防ぎやすい。

【第 4 問】

xy 平面の点 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 4)$ を結んでできる折れ線をグラフとする関数を $y = f(x)$ とおく。このとき、積分

$$\int_{-1}^1 \{f(x) - (a|x| + b)\}^2 dx$$

を最小にする a , b を求めよ。また、そのときの積分の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

折れ線で定義された $f(x)$ を、 $-1 \leq x \leq 0$ と $0 \leq x \leq 1$ に分けて一次式で表す。 $|x|$ も同じ区間で外せるので、積分は a, b の 2 次式になる。2 変数の 2 次式を、まず a について平方完成し、次に残った b の 2 次式を平方完成して最小値を求める。

【解答】

折れ線の式を区間ごとに求める。点 $(-1, 0)$ と $(0, 1)$ を結ぶ直線は傾き 1 なので $f(x) = x + 1$ ($-1 \leq x \leq 0$) である。また、点 $(0, 1)$ と $(1, 4)$ を結ぶ直線は傾き 3 なので $f(x) = 3x + 1$ ($0 \leq x \leq 1$) である。

さらに、 $-1 \leq x \leq 0$ では $|x| = -x$ 、 $0 \leq x \leq 1$ では $|x| = x$ である。積分値を I とおくと

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 \{x + 1 - (-ax + b)\}^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 \{3x + 1 - (ax + b)\}^2 dx \\ &= \int_{-1}^0 \{(1 + a)x + 1 - b\}^2 dx \\ &\quad + \int_0^1 \{(3 - a)x + 1 - b\}^2 dx. \end{aligned}$$

一般に

$$\int_0^1 (px + q)^2 dx = \frac{p^2}{3} + pq + q^2$$

であり、左側の積分も $u = -x$ と置けば同様に処理できる。展開して整理すると

$$I = \frac{2}{3}a^2 + 2ab - \frac{10}{3}a + 2b^2 - 6b + \frac{22}{3}$$

である。

まず b を固定して a について平方完成する。

$$I = \frac{2}{3} \left(a - \frac{5 - 3b}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2}b^2 - b + \frac{19}{6} \right).$$

したがって、固定した b に対して最小となるのは $a = \frac{5 - 3b}{2}$ のときである。

残った b の式は $\frac{1}{2}b^2 - b + \frac{19}{6} = \frac{1}{2}(b - 1)^2 + \frac{8}{3}$ である。よって最小となるのは $b = 1$ のときであり、そのとき $a = \frac{5 - 3}{2} = 1$ である。

したがって $a = 1$, $b = 1$ であり、最小値は $\frac{8}{3}$ である。

▶ 解法 2 (奇関数と偶関数の分離)

【方針】

基準となる近似関数を $|x| + 1$ と選ぶ。 $f(x) - (|x| + 1) = 2x$ は奇関数であり、一般の補正 $(1-a)|x| + (1-b)$ は偶関数である。対称区間では両者の積分が 0 になるため、誤差平方積分が直交分解される。

【解答】

区間ごとの式から

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (-1 \leq x \leq 0), \\ 3x + 1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

である。したがって両区間で

$$f(x) - (|x| + 1) = 2x$$

が成り立つ。

よって

$$f(x) - (a|x| + b) = 2x + (1-a)|x| + (1-b).$$

ここで $2x$ は奇関数、

$$E(x) = (1-a)|x| + (1-b)$$

は偶関数である。したがって $2xE(x)$ は奇関数であり、対称区間上で

$$\int_{-1}^1 2xE(x) dx = 0$$

となる。ゆえに

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{f(x) - (a|x| + b)\}^2 dx &= \int_{-1}^1 4x^2 dx + \int_{-1}^1 E(x)^2 dx \\ &\geq \int_{-1}^1 4x^2 dx. \end{aligned}$$

等号が成り立つには $E(x) \equiv 0$ が必要十分であり、

$$a = 1, \quad b = 1$$

である。このとき最小値は

$$\int_{-1}^1 4x^2 dx = \frac{8}{3}$$

となる。

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 22 分程度で、折れ線関数と絶対値を同じ区間で分けるところが出発点である。積分後は a, b の 2 次式になるため、文系範囲では平方完成で最小値を出すのが自然である。計算量は大きくないが、左区間で $|x| = -x$ になること、定数項まで含めて積分することを誤ると最小値がずれる。最後に最小値 $8/3$ まで代入して確認する。