

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2010 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

n を 2 以上の自然数とする. $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ は $x_1 > x_2 > \dots > x_n, y_1 > y_2 > \dots > y_n$ を満たす実数とする. $z_1, \dots, z_n$ は $y_1, \dots, y_n$ を任意に並べ替えたものとするとき,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのはどのようなときか答えよ.

第 2 問

b は $|b| \geq 3$ を満たす整数とする. 2 次方程式 $x^2 + bx + 1 = 0$ の解を α, β とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 0 以上のすべての整数 n に対して $\alpha^n + \beta^n$ は整数であることを示せ.

(2) $|\alpha| > |\beta|$ とする. α^n から最も近い整数と α^n との差を d_n とする. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ を求めよ.

第 3 問

xy 平面上で、原点を中心とする角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の回転を行い、さらに直線 $y = x$ に関する対称移動を行う。これが直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する対称移動と一致するとき、 θ の値を求めよ。

第 4 問

$f(x) = \sqrt{x+2}$ として, 数列 $x_0, x_1, x_2, \dots$ を

$$x_0 = 0, \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) すべての自然数 n に対して

$$2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < x_n < x_{n+1} < 2$$

が成り立つことを示せ.

(2) すべての自然数 n に対して

$$x_n < 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

が成り立つことを示せ.

(3) すべての自然数 n に対して $x_n < 2 - \alpha^n$ を満たす正の定数 α のうち, 最大のものを求めよ.

第 5 問

以下の問いに答えよ.

(1) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $\cos(\pi \cos x) = \frac{1}{2}$ を満たす x の個数を求めよ.

(2) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $\cos(\pi \cos x) = \cos x$ を満たす x の個数を求めよ.

第 6 問

xy 平面において，連立不等式

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$y \geq 0$$

の表す領域を A とする．これを座標空間内で z 軸の方向に 1 だけ平行移動するときに A が通過してできる立体を B とする． B を x 軸のまわりに， y 軸から z 軸の方向に 90° 回転させたときに通過してできる立体を C とする． C の体積を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)