

東北大学 2010 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

n を 2 以上の自然数とする. $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ は $x_1 > x_2 > \dots > x_n, y_1 > y_2 > \dots > y_n$ を満たす実数とする. $z_1, \dots, z_n$ は $y_1, \dots, y_n$ を任意に並べ替えたものとするとき,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのはどのようなときか答えよ.

▶ 解法 1

【方針】

並べ替え $z_1, \dots, z_n$ に, 大きい順になっていない隣接または 2 項の逆転があれば, その 2 つを入れ替えることで 2 乗和が小さくなることを示す. これを繰り返すと $z_i = y_i$ の順に到達し, そのときが最小である. 等号条件は, x_i も y_i もすべて厳密に減少しているため, 1 回でも逆転交換が必要なら和が厳密に減ることから判定する.

【解答】

$z_1, \dots, z_n$ が $y_1, \dots, y_n$ の並べ替えであるとする. もし $i < j$ で $z_i < z_j$ となる組があれば, z_i と z_j は大きい順に並んでいない.

この 2 つだけを入れ替えたときの 2 乗和の変化を調べる. 入れ替える前の該当部分は $(x_i - z_i)^2 + (x_j - z_j)^2$ であり, 入れ替えた後は $(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2$ である. 差を取ると $\{(x_i - z_i)^2 + (x_j - z_j)^2\} - \{(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2\} = 2(x_i - x_j)(z_j - z_i)$. ここで $i < j$ より $x_i > x_j$ であり, また仮定より $z_j > z_i$ である. したがって $2(x_i - x_j)(z_j - z_i) > 0$ である. つまり, このような逆転を入れ替えると, 2 乗和は厳密に小さくなる.

この操作を繰り返すと, $z_1, z_2, \dots, z_n$ は大きい順に並ぶ. $y_1 > y_2 > \dots > y_n$ であり, z_i は y_i の並べ替えなので, 最終的には $z_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) となる. この過程で和は増えず, 逆転があれば厳密に小さくなる. したがって $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$ が成り立つ.

等号について考える. もし z_i が y_i と同じ順でなければ, ある $i < j$ について $z_i < z_j$ となる逆転が存在し, 上の交換で 2 乗和が厳密に小さくなる. したがって等号は成り立たない.

よって等号が成り立つのは, はじめから $z_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) であるとき, かつそのときに限られる.

▶ 解法 2（内積和へ帰着）

【方針】

両辺の平方和を展開する. z_i は y_i の並べ替えなので定数部分は一致し, 問題は $\sum x_i y_i$ が $\sum x_i z_i$ 以上であることへ帰着する. 最大の y_1 を先頭へ移す交換を繰り返し, 帰納的に順序を確定する.

【解答】

まず

$$\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$

を展開する. $z_1, \dots, z_n$ は $y_1, \dots, y_n$ の並べ替えだから

$$\sum_{i=1}^n z_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

であり,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i z_i \right).$$

そこで右辺の括弧が非負であることを示す. 並び $z_1, \dots, z_n$ の中で最大の数 y_1 が第 k 項にあるとする. $k > 1$ なら $z_1 < y_1$

である。 z_1 と $z_k = y_1$ を交換したとき、和 $\sum x_i z_i$ の増加量は

$$x_1 y_1 + x_k z_1 - (x_1 z_1 + x_k y_1) = (x_1 - x_k)(y_1 - z_1) > 0$$

である。よって最大値を与える並びでは必ず $z_1 = y_1$ でなければならない。

残る $n-1$ 項にも同じ議論を順に適用すると、 $\sum x_i z_i$ が最大となるのは

$$z_i = y_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

のときだけである。したがって

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \sum_{i=1}^n x_i z_i.$$

これを最初に展開した差の式へ戻せば、求める不等式を得る。

また x_i, y_i はいずれも狭義減少列なので、順序が 1 か所でも異なれば上の交換で和は厳密に増える。よって等号成立は

$$z_i = y_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

のとき、かつそのときに限る。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 25 分程度で、いわゆる並べ替えの不等式を 2 乗和の形で証明する問題である。全体を一度に比較するのではなく、逆順の 2 項を入れ替えたときの差を計算するのが最も安全である。 x_i と y_i がともに厳密な減少列なので、逆転があると差は必ず正になり、等号条件も一意に決まる。

【第 2 問】

b は $|b| \geq 3$ を満たす整数とする。2 次方程式 $x^2 + bx + 1 = 0$ の解を α, β とする。以下の問いに答えよ。

(1) 0 以上のすべての整数 n に対して $\alpha^n + \beta^n$ は整数であることを示せ。

(2) $|\alpha| > |\beta|$ とする。 α^n から最も近い整数と α^n との差を d_n とする。極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ を求めよ。

【方針】

解と係数の関係から $\alpha + \beta = -b$, $\alpha\beta = 1$ を用い、 $s_n = \alpha^n + \beta^n$ の漸化式を作る。整数性は初期値 s_0, s_1 と漸化式による帰納法で示す。後半は $|\alpha| > |\beta|$ と $\alpha\beta = 1$ から $|\beta| < 1$ を導き、整数 s_n が十分大きな n で α^n に最も近い整数になることを使う。

【解答】

(1) 2 次方程式 $x^2 + bx + 1 = 0$ の解が α, β であるから、解と係数の関係より $\alpha + \beta = -b$, $\alpha\beta = 1$ である。 $s_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。方程式の解であることから $\alpha^2 + b\alpha + 1 = 0$, $\beta^2 + b\beta + 1 = 0$ である。両辺にそれぞれ α^n, β^n を掛けると $\alpha^{n+2} + b\alpha^{n+1} + \alpha^n = 0$, $\beta^{n+2} + b\beta^{n+1} + \beta^n = 0$ である。これらを足して $s_{n+2} + bs_{n+1} + s_n = 0$ すなわち $s_{n+2} = -bs_{n+1} - s_n$ を得る。

初期値は $s_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 2$, $s_1 = \alpha + \beta = -b$ である。 b は整数なので s_0, s_1 は整数である。さらに漸化式 $s_{n+2} = -bs_{n+1} - s_n$ は整数係数であるから、帰納法によりすべての 0 以上の整数 n について $\alpha^n + \beta^n$ は整数である。

(2) $|\alpha| > |\beta|$ とする。 $\alpha\beta = 1$ であるから $|\alpha||\beta| = 1$ である。したがって $|\alpha| > 1$, $|\beta| < 1$ である。

(1) より $s_n = \alpha^n + \beta^n$ は整数である。また $|s_n - \alpha^n| = |\beta^n| = |\beta|^n$ であり、 $|\beta| < 1$ だから $|\beta|^n \rightarrow 0$ である。特に十分大きい n では $|\beta|^n < \frac{1}{2}$ となるので、整数 s_n は α^n に最も近い整数である。

したがって、十分大きい n では $d_n = |s_n - \alpha^n| = |\beta|^n$ である。よって $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta|^n = 0$ である。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 25 分程度で、2 次方程式の解の累乗和が満たす漸化式を作ることが中心である。(1) は $s_0 = 2$ を含めて初期値を明記すると帰納法が自然に書ける。(2) では s_n が整数で、しかも α^n との差が β^n だけであることが決定的である。最も近い整数の議論では、 $|\beta|^n < 1/2$ となる十分大きな n を考えればよい。

【第 3 問】

xy 平面上で、原点を中心とする角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の回転を行い、さらに直線 $y = x$ に関する対称移動を行う。これが直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する対称移動と一致するとき、 θ の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

回転行列と直線 $y = x$ に関する対称移動の行列を順に掛け、直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する対称移動の行列と比較する。別解として、方向角 ϕ の半直線が回転後の反射でどの方向に移るかを追い、反射軸の角度を比較して θ を求める。

【解答】

角 θ の回転を表す行列は

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である。また、直線 $y = x$ に関する対称移動を表す行列は

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

問題では、まず回転を行い、さらに直線 $y = x$ に関する対称移動を行うので、合成変換は

$$SR = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}$$

で表される。

一方、直線 $y = \sqrt{3}x$ は x 軸となす角が $\frac{\pi}{3}$ である。角 φ の直線に関する対称移動の行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

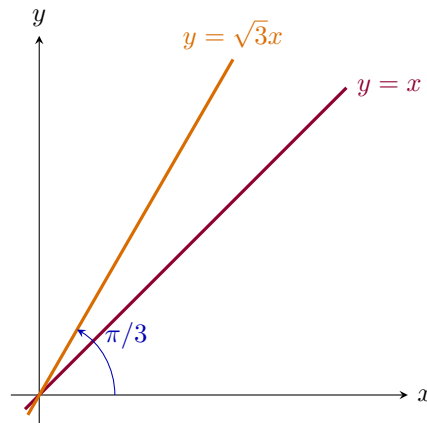
であるから、 $\varphi = \pi/3$ として

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & -\cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である。

したがって係数を比較して $\sin \theta = -\frac{1}{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より $\theta = \frac{11\pi}{6}$ である。

【2本の反射軸】



反射軸の方向角は $\pi/4$ と $\pi/3$ 。合成では角の向きを追う。

▶ 解法 2 (方向角)

【方針】

方向角が ϕ の半直線を追跡する。角 θ の回転後、方向角 $\pi/4$ の直線で反射すると $\pi/2 - \theta - \phi$ へ移る。一方、方向角 $\pi/3$ の直線での反射は $2\pi/3 - \phi$ へ移るので、両者を比較する。

【解答】

方向角が ϕ の半直線を考える。まず角 θ だけ回転すると、方向角は

$$\phi + \theta$$

になる。

次に直線 $y = x$ 、すなわち方向角 $\pi/4$ の直線に関して対称移動すると、方向角は

$$2 \cdot \frac{\pi}{4} - (\phi + \theta) = \frac{\pi}{2} - \theta - \phi$$

になる。

一方、直線 $y = \sqrt{3}x$ の方向角は $\pi/3$ であり、この直線に関する対称移動では

$$\phi \mapsto 2 \cdot \frac{\pi}{3} - \phi = \frac{2\pi}{3} - \phi$$

である。2つの変換が一致するための条件は

$$\frac{\pi}{2} - \theta - \phi \equiv \frac{2\pi}{3} - \phi \pmod{2\pi}$$

である。したがって

$$\theta \equiv -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}.$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$\theta = \frac{11\pi}{6}$$

である。

【総評】 難度は10段階中4、計算量は10段階中3。目安時間は15分程度で、行列表示を覚えていれば確実に取りたい問題である。注意点は合成の順序で、先に回転してから対称移動するため行列は SR となる。別解のように方向角で考えると、反射が「角度を $2\alpha - \phi$ に移す」操作であることから一気に求まる。どちらの方法でも、最後に $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲へ戻すことを忘れない。

【第 4 問】

$f(x) = \sqrt{x+2}$ として、数列 $x_0, x_1, x_2, \dots$ を

$$x_0 = 0, \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して

$$2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < x_n < x_{n+1} < 2$$

が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して

$$x_n < 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して $x_n < 2 - \alpha^n$ を満たす正の定数 α のうち、最大のものを求めよ。

【方針】

初期値を $x_0 = 0$ 、漸化式を $x_n = f(x_{n-1})$ として扱う。固定点は $x = 2$ なので、誤差 $d_n = 2 - x_n$ を導入する。漸化式から $d_{n+1} = d_n / (2 + x_{n+1})$ が得られ、 $0 < x_n < 2$ より分母が 2 と 4 の間にあることを使って上下から評価する。最大の α は、誤差比が $1/4$ に近づくことから決める。

【解答】

初期値を $x_0 = 0$ とし、 $x_n = \sqrt{x_{n-1} + 2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) として考える。

(1) まず $x_n < 2$ と単調増加を示す。 $x_0 = 0 < 2$ であり、 $x_n < 2$ なら $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} < \sqrt{4} = 2$ である。よって帰納法により $x_n < 2$ がすべての n で成り立つ。

また $0 \leq x_n < 2$ のとき、 $x_{n+1} > x_n$ は $\sqrt{x_n + 2} > x_n$ と同値である。両辺は非負なので二乗してよく、 $x_n + 2 > x_n^2$ すなわち $(2 - x_n)(x_n + 1) > 0$ である。これは $0 \leq x_n < 2$ から成り立つ。したがって $x_n < x_{n+1} < 2$ である。

次に下からの評価を示す。 $d_n = 2 - x_n$ とおくと

$$d_{n+1} = 2 - x_{n+1} = \frac{4 - x_{n+1}^2}{2 + x_{n+1}} = \frac{2 - x_n}{2 + x_{n+1}} = \frac{d_n}{2 + x_{n+1}}.$$

ここで $x_{n+1} > 0$ だから $2 + x_{n+1} > 2$ であり、 $d_{n+1} < \frac{d_n}{2}$ である。また $d_1 = 2 - \sqrt{2} < 1$ なので、帰納法により $d_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。すなわち $2 - x_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ であり、 $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < x_n$ である。

以上より $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < x_n < x_{n+1} < 2$ が成り立つ。

(2) (1) と同じく $d_n = 2 - x_n$ とおく。上で得た式 $d_{n+1} = \frac{d_n}{2 + x_{n+1}}$ を用いる。 $x_{n+1} < 2$ だから $2 + x_{n+1} < 4$ であり、 $d_{n+1} > \frac{d_n}{4}$ である。また $d_1 = 2 - \sqrt{2} > \frac{1}{4}$ である。したがって帰納法により $d_n > \left(\frac{1}{4}\right)^n$ である。すなわち $x_n < 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$ である。

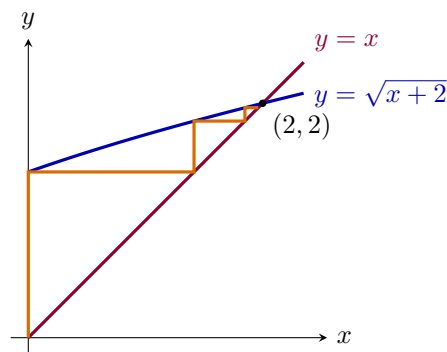
(3) (2) より $\alpha = \frac{1}{4}$ は条件を満たす。

これより大きい α が条件を満たさないことを示す。 x_n は増加して 2 より小さいので、極限を L とすると $L = \sqrt{L+2}$ である。 $0 \leq L \leq 2$ より $L = 2$ である。したがって $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{1}{2 + x_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{4}$ である。

いま $\alpha > 1/4$ とする。 $1/4 < \rho < \alpha$ となる ρ を 1 つ取る。十分大きい n では $\frac{d_{n+1}}{d_n} < \rho$ が成り立つ。するとある番号 N 以後で $d_n < d_N \rho^{n-N}$ となる。ところが $\rho/\alpha < 1$ なので、十分大きい n では $d_N \rho^{n-N} < \alpha^n$ となる。したがって $d_n < \alpha^n$ となる n が存在し、すべての n について $x_n < 2 - \alpha^n$ 、すなわち $d_n > \alpha^n$ を満たすことはできない。

よって最大の定数は $\alpha = \frac{1}{4}$ である。

【固定点 2 へ近づく反復】



階段状の線は $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ の反復を表し、固定点 2 へ近づく。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安時間は 30 分程度で、固定点 2 との差 $d_n = 2 - x_n$ を見るのが決定的である。単調増加と上界を先に示しておく、分母 $2 + x_{n+1}$ を 2 と 4 で挟む評価が使える。(3) は単に (2) の結果を読むだけでなく、誤差比が $1/4$ に近づくため、それより大きい α はいずれ破綻することを示す必要がある。添字は $x_0 = 0$ から始まる形で整理すると不等式が自然にそう。

【第 5 問】

以下の問いに答えよ。

(1) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $\cos(\pi \cos x) = \frac{1}{2}$ を満たす x の個数を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で $\cos(\pi \cos x) = \cos x$ を満たす x の個数を求めよ。

【方針】

$u = \cos x$ とおき、まず $-1 \leq u \leq 1$ における方程式の解の個数を数える。その後、 $u = \pm 1$ なら x は 1 個、 $-1 < u < 1$ なら $0 \leq x \leq 2\pi$ に x は 2 個対応することを使って戻す。(2) は $h(u) = \cos(\pi u) - u$ の符号と単調性・凸性を区間ごとに調べる。

【解答】

(1) $u = \cos x$ とおくと、 $0 \leq x \leq 2\pi$ に対して $-1 \leq u \leq 1$ である。方程式は $\cos(\pi u) = \frac{1}{2}$ となる。

$-1 \leq u \leq 1$ の範囲では、 πu は $-\pi$ から π まで動く。この範囲で $\cos(\pi u) = \frac{1}{2}$ となるのは $\pi u = \pm \frac{\pi}{3}$ のときである。したがって $u = \pm \frac{1}{3}$ である。

$u = 1/3$, $u = -1/3$ はどちらも $-1 < u < 1$ にあるので、それぞれに対して $0 \leq x \leq 2\pi$ の解は 2 個ずつある。よって解の個数は 4 である。

(2) 同じく $u = \cos x$ とおくと、方程式は $\cos(\pi u) = u$ である。そこで $h(u) = \cos(\pi u) - u$ とおき、 $-1 \leq u \leq 1$ で零点の個数を調べる。

まず $h(-1) = \cos(-\pi) + 1 = 0$ である。また

$$h\left(-\frac{5}{6}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{5}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{6} < 0$$

であり、 $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$ である。したがって $(-5/6, -1/2)$ に少なくとも 1 つ零点がある。

この区間を含む $[-1, -1/2]$ では $h'(u) = -\pi \sin(\pi u) - 1$, $h''(u) = -\pi^2 \cos(\pi u)$ である。 $-1 \leq u \leq -1/2$ では $\cos(\pi u) \leq 0$ なので $h''(u) \geq 0$ である。よって h' は増加関数であり、 h はこの区間で一度減少してから増加する形になる。したがって $[-1, -1/2]$ における零点は、端点 $u = -1$ と、その後の 1 個だけである。

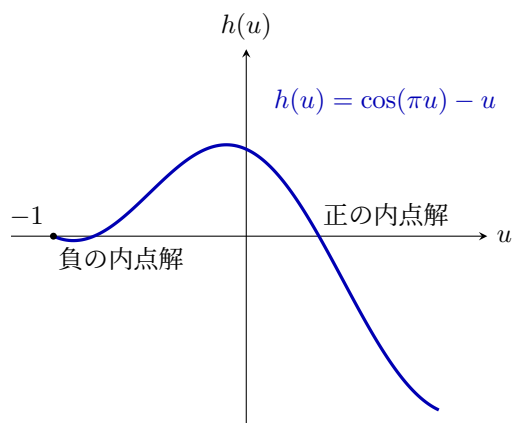
次に $[-1/2, 0]$ では $\cos(\pi u) \geq 0$, $-u \geq 0$ であり、両方が同時に 0 になることはない。したがって $h(u) = \cos(\pi u) - u > 0$ であり、零点はない。

最後に $[0, 1]$ では $h'(u) = -\pi \sin(\pi u) - 1 < 0$ であるから、 h は単調減少する。また $h(0) = 1 > 0$, $h(1) = -2 < 0$ である。したがって $[0, 1]$ には零点が 1 つだけある。

以上より, u の解は $u = -1$, $-1 < u < -\frac{1}{2}$ に 1 個, $0 < u < 1$ に 1 個 の合計 3 個である。 $u = -1$ は $x = \pi$ の 1 個だけを与え, 残り 2 つの解は $-1 < u < 1$ にあるので, それぞれ x を 2 個ずつ与える。

したがって x の解の個数は $1 + 2 + 2 = 5$ である。

【 u に置き換えた零点の配置】



$u = -1$ の端点解と、区間内部の 2 解を x の個数へ戻す。

【総評】 難度は 10 段階中 6、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 25 分程度で、 $u = \cos x$ に置き換えた後、 u の解の個数と x の解の個数を区別することが重要である。(1) は単純だが、各 u が 2 個の x に対応する点を忘れやすい。(2) はグラフの概形を符号と導関数で丁寧に押さえる問題で、特に $u = -1$ が端点解として 1 個の x しか与えないことが最終個数に影響する。

【第 6 問】

xy 平面において、連立不等式

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$y \geq 0$$

の表す領域を A とする. これを座標空間内で z 軸の方向に 1 だけ平行移動するときに A が通過してできる立体を B とする. B を x 軸のまわりに、 y 軸から z 軸の方向に 90° 回転させたときに通過してできる立体を C とする. C の体積を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

固定した x で切った断面を考える. 領域 A は $0 \leq x \leq 1$ で $0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$ を満たすので, B の yz 断面は高さ 1, 幅 $r = \sqrt{2x-x^2}$ の長方形になる. この長方形を原点まわりに 90 度回転したときの掃過面積を, 極角ごとの最大半径で求め, 最後に x で積分する.

【解答】

領域 A は $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$ で表される. 固定した x に対して, y の範囲は $0 \leq y \leq \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x-x^2}$ である.

これを z 軸方向に 1 だけ平行移動して通過する立体 B を考えると, 固定した x における yz 平面での断面は $0 \leq y \leq r$, $0 \leq z \leq 1$ という長方形である. ただし $r = \sqrt{2x-x^2}$ である. $0 \leq x \leq 1$ では $0 \leq r \leq 1$ である.

この長方形を, y 軸から z 軸の方向へ 90 度回転させたときに通過する部分の面積を求める. yz 平面で原点を中心とする極角を考える. もとの長方形内で, 角 ϕ 方向に進める最大半径は

$$R(\phi) = \min \left(\frac{r}{\cos \phi}, \frac{1}{\sin \phi} \right) \quad (0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2})$$

である. 2 つが等しくなる角を ϕ_0 とすると $\tan \phi_0 = \frac{1}{r}$ であり, そのときの最大半径は $\sqrt{1+r^2}$ である.

90 度回転で通過する領域を極角ごとに見ると、最大半径は $0 \leq \theta \leq \phi_0$ では $r/\cos \theta$, $\phi_0 \leq \theta \leq \phi_0 + \frac{\pi}{2}$ では $\sqrt{1+r^2}$, $\phi_0 + \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ では $1/(-\cos \theta)$ である。したがって掃過面積 $S(r)$ は、扇形の面積公式を用いて

$$S(r) = \frac{1}{2} \int_0^{\phi_0} \frac{r^2}{\cos^2 \theta} d\theta + \frac{1}{2} \int_{\phi_0}^{\phi_0 + \pi/2} (1+r^2) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\phi_0 + \pi/2}^{\pi} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

ここで $\tan \phi_0 = \frac{1}{r}$, $\tan \left(\phi_0 + \frac{\pi}{2} \right) = -r$ であるから

$$S(r) = \frac{1}{2} r^2 \tan \phi_0 + \frac{\pi}{4} (1+r^2) + \frac{1}{2} \left\{ \tan \pi - \tan \left(\phi_0 + \frac{\pi}{2} \right) \right\}.$$

よって $S(r) = \frac{1}{2} r + \frac{\pi}{4} (1+r^2) + \frac{1}{2} r = r + \frac{\pi}{4} (1+r^2)$. したがって求める体積は

$$\int_0^1 \left\{ r + \frac{\pi}{4} (1+r^2) \right\} dx = \int_0^1 \left\{ \sqrt{2x-x^2} + \frac{\pi}{4} (1+2x-x^2) \right\} dx$$

である。

まず

$$\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2}$$

であるから

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx$$

は半径 1 の円の第 2 象限の 4 分の 1 の面積に等しい。したがって

$$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

である。また

$$\int_0^1 (1+2x-x^2) dx = \left[x + x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 + 1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

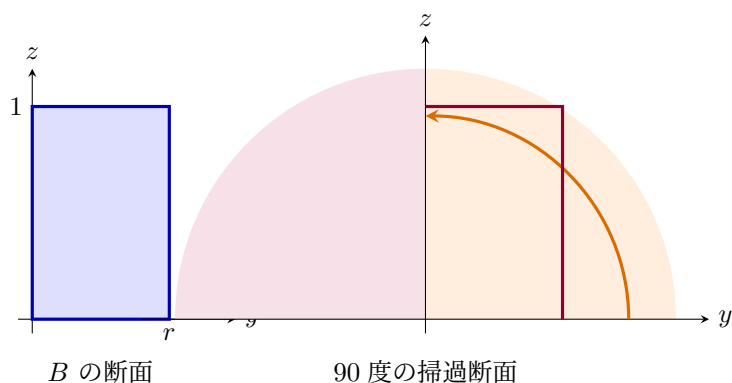
である。

よって体積は

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

である。

【固定した x における断面】



長方形を 90 度掃過した断面積を求め、それを x 方向へ積分する。

▶ 解法 2 (断面の幾何分解)

【方針】

固定した x で B を切ると、辺長 $r = \sqrt{2x - x^2}$ と 1 の長方形になる。この長方形を 90 度掃過した領域を、長方形と半径 $r, 1$ の 2 つの四分円へ分解して断面積を出し、最後に x で積分する。

【解答】

固定した x に対して

$$r = \sqrt{2x - x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

とおく。このとき B の yz 平面による断面は

$$0 \leq y \leq r, \quad 0 \leq z \leq 1$$

で表される長方形である。

この長方形を原点のまわりに 90 度掃過してできる領域は、境界をたどると、辺長 $r, 1$ の長方形と、半径 r および 1 の四分円に、重なりなく分解できる。したがって断面積は

$$S(r) = r + \frac{\pi r^2}{4} + \frac{\pi}{4} = r + \frac{\pi}{4}(1 + r^2)$$

である。

よって求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S(\sqrt{2x - x^2}) \, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{2x - x^2} \, dx + \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1 + 2x - x^2) \, dx. \end{aligned}$$

第 1 の積分は

$$y = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$$

で表される半径 1 の四分円の面積だから

$$\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

また

$$\int_0^1 (1 + 2x - x^2) \, dx = \frac{5}{3}.$$

したがって

$$V = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 7。目安時間は 35 分程度で、3 次元の動きを固定した x の断面に落とせるかが勝負である。 B の断面が長方形になることを確認したうえで、その長方形を 90 度回転した掃過面積を別問題として処理すると見通しがよい。

【検算の要点】

掃過面積

$$S(r) = r + \frac{\pi}{4}(1 + r^2)$$

は、 $r = 0$ で長さ 1 の線分が掃く四分円の面積 $\pi/4$ に、 $r = 1$ で単位正方形が掃く面積 $1 + \pi/2$ に一致する。さらに $0 \leq r \leq 1$ では $S(r)$ は増加するので、最終値 $2\pi/3$ がこの 2 値の間に入ることも確認できる。

【誤答を防ぐチェック】

平行移動後の z の範囲を $0 \leq z \leq 1$ と書き、回転軸が各断面の原点に当たることを明示する。回転後を円板や半円と決めつけず、「長方形が 90 度の間に通過する領域」を求める点が重要である。また、 $r^2 = 2x - x^2$ を代入した後、平方根を含む積分と多項式積分を分けると計算ミスを防ぎやすい。

【解法の使い分け】

本番では幾何分解が見えれば解法 2 が短い。分解に確信が持てない場合は、解法 1 の極角表示で境界を 3 区間に分ければ重複なく面積を導ける。どちらの方法でも、まず断面積を $S(r)$ として独立に確定し、その後で $r = \sqrt{2x - x^2}$ を戻す順序を守ると答案が読みやすい。