

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2010 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ とする. $y < x < a$ を満たすすべての x, y に対して $f(x) > \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y}$ が成り立つような a の範囲を求めよ.

第 2 問

a, b を正の実数とする. 曲線 $C: y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $P(b, 0)$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 (a, b) の存在する領域を図示せよ.
- (2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする. 2 つの接点を A, B としたとき, $\angle APB$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ.

第 3 問

1, 2, 3, 4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて, 次の手順で 5 桁の整数をつくる. まず 1 枚を取り出して現れた数字を 1 の位とする. 取り出した 1 枚を元に戻し, 4 枚のカードをよく混ぜて, 再び 1 枚を取り出して現れた数字を 10 の位とする. このような操作を 5 回繰り返して, 5 桁の整数をつくる. 得られた整数を X とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ.
- (2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ.
- (3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ.

第 4 問

四面体 $ABCD$ において、辺 AB の中点を M 、辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 等式 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。
- (2) 点 Q が等式 $|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$ を満たしながら動くとき、点 Q が描く図形を求めよ。
- (3) 点 R が等式 $|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$ を満たしながら動くとき、内積 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。
- (4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。

第 5 問

$0 < t < 3$ のとき，連立不等式
$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sin x \\ 0 \leq x \leq t - y \end{cases}$$
 の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする． $\frac{d}{dt}V(t) = \frac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ．

第 6 問

xy 平面において、原点を中心とし $P(1, 0)$ を頂点の 1 つとする正 6 角形を X とする. A を 2 次の正方行列とし, X の各頂点 (x, y) に対して, 行列 A の表す移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で得られる点 (x', y') は X の辺上の点 (頂点を含む) であるとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P が行列 A の表す移動で P 自身に移るとき, X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ. また, そのときの行列 A を求めよ.
- (2) 点 P が行列 A の表す移動で X のある頂点に移るとき, X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ. また, そのときの行列 A を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)