

東北大学 2010 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ とする. $y < x < a$ を満たすすべての x, y に対して $f(x) > \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y}$ が成り立つような a の範囲を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

弦の値と $f(x)$ の差を直接因数分解する. $y < x < a$ では $(x-a)(x-y)$ の符号が常に負になるので, 残りの一次式 $a+x+y+3$ が常に負になる条件を求める. 必要性は x, y を a に近づけて調べ, 十分性は $a \leq -1$ から $a+x+y+3 < 0$ を示す.

【解答】

点 $(y, f(y))$ と $(a, f(a))$ を結ぶ直線において, x に対応する値は $\frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y}$ である. したがって, 求める条件は $f(x) - \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y} > 0$ が, すべての $y < x < a$ に対して成り立つことである.

$f(t) = t^3 + 3t^2 - 9t$ を代入して整理する. 分母 $a-y$ は $y < a$ より正である. 分子を計算すると $(a-y)f(x) - (x-y)f(a) - (a-x)f(y)$ であり, これは因数分解して $(a-y)(x-a)(x-y)(a+x+y+3)$ となる. よって $f(x) - \frac{(x-y)f(a) + (a-x)f(y)}{a-y} = (x-a)(x-y)(a+x+y+3)$ である.

ここで $y < x < a$ だから $x-a < 0$, $x-y > 0$ である. したがって $(x-a)(x-y) < 0$ である. 差が常に正となるためには $a+x+y+3 < 0$ が常に成り立つことが必要十分である.

まず必要性を調べる. x, y をともに a に近づけると, $a+x+y+3$ は $3a+3$ にいくらでも近づく. もし $a > -1$ なら $3a+3 > 0$ であるから, x, y を十分 a に近く取ることによって $a+x+y+3 > 0$ となり, 不等式は成り立たない. よって必要条件は $a \leq -1$ である.

逆に $a \leq -1$ とする. $y < x < a$ より $x < a$, $y < a$ なので $a+x+y+3 < a+a+a+3 = 3a+3 \leq 0$. 実際には $x < a$, $y < a$ であるから $a+x+y+3 < 0$ である. したがって差は常に正となり, 条件を満たす.

以上より求める範囲は $a \leq -1$ である.

▶ 解法 2 (2 階導関数による判定)

【方針】

3 次関数のグラフが弦より上にある条件を、区間 $(-\infty, a)$ における上に凸性へ読み替える. $f''(t) = 6(t+1)$ の符号から十分性を示し、 $a > -1$ では a の直前に下に凸な小区間を取って必要性を示す.

【解答】

関数

$$f(t) = t^3 + 3t^2 - 9t$$

について

$$f''(t) = 6(t+1)$$

である.

$a \leq -1$ とする. 任意の $y < x < a$ に対して $t < a \leq -1$ だから $f''(t) < 0$ である. したがって f は区間 $[y, a]$ で上に凸であり、内点 x におけるグラフは、 $(y, f(y))$ と $(a, f(a))$ を結ぶ弦より厳密に上にある. よって問題の不等式はすべての $y < x < a$ に対して成り立つ.

逆に $a > -1$ とする. このとき

$$\max(-1, a-\varepsilon) < y < x < a$$

となる x, y を、十分小さい正数 ε を用いて選べる. この区間では $f''(t) > 0$ であるから f は下に凸であり、内点のグラフは弦より下になる. したがって問題の厳密不等式に反する.

以上より求める範囲は

$$a \leq -1$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 4。目安時間は 18 分程度で、3 次関数と弦の上下関係を因数分解で処理する標準問題である。差の因数分解後、 $y < x < a$ から符号が決まる部分と、範囲条件として調べる部分を分けるのが重要である。境界 $a = -1$ では $x, y < a$ のため不等式はなお厳密に成り立つので、 $a < -1$ と誤って狭めないように注意する。

【第 2 問】

a, b を正の実数とする。曲線 $C: y = x^3 - a^2x + a^3$ と点 $P(b, 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 (a, b) の存在する領域を図示せよ。

(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A, B としたとき、 $\angle APB$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ。

【方針】

接点の x 座標を t とおき、その接線が $P(b, 0)$ を通る条件を t の 3 次方程式にする。 $a, b > 0$ なので $u = t/a$, $k = b/a$ と無次元化し、3 次関数の極小値・極大値から異なる実根の個数を判定する。接線がちょうど 2 本の場合は重解を含む境界 $k = 1$ であり、2 つの接点を求めて、 P から見た 2 ベクトルの内積が正になる条件を調べる。

【解答】

(1) 接点の x 座標を t とする。曲線 $y = x^3 - a^2x + a^3$ の導関数は $y' = 3x^2 - a^2$ であるから、接点 $T(t, t^3 - a^2t + a^3)$ における接線は $y - (t^3 - a^2t + a^3) = (3t^2 - a^2)(x - t)$ である。この接線が $P(b, 0)$ を通る条件は $0 - (t^3 - a^2t + a^3) = (3t^2 - a^2)(b - t)$ である。整理すると $a^3 - a^2b + 3bt^2 - 2t^3 = 0$ となる。

ここで $u = \frac{t}{a}$, $k = \frac{b}{a}$ とおく。 $a > 0$ なので、両辺を a^3 で割ると $-2u^3 + 3ku^2 - k + 1 = 0$ である。これを $g(u) = -2u^3 + 3ku^2 - k + 1$ とおく。導関数は $g'(u) = -6u^2 + 6ku = 6u(k - u)$ である。したがって極値をとる点は $u = 0$, $u = k$ である。 $k > 0$ であるから、 $u = 0$ は極小、 $u = k$ は極大である。

それぞれの値は $g(0) = 1 - k$, $g(k) = k^3 - k + 1$ である。 $k^3 - k + 1$ は $k > 0$ で常に正である。実際、 $k^3 - k + 1$ の最小値は $k = 1/\sqrt{3}$ で現れ、 $1 - \frac{2}{3\sqrt{3}} > 0$ である。よって異なる 3 つの実根をもつためには、極小値が負であればよい。すなわち $1 - k < 0$ より $k > 1$ である。

$k = b/a$ だから、求める領域は $a > 0$, $b > a$ である。図示すれば、 ab 平面の第 1 象限において直線 $b = a$ の上側の部分である。

(2) 接線がちょうど 2 本となるのは、(1) の境界で極小値が 0 になる場合である。したがって $k = 1$ すなわち $b = a$ である。このとき $g(u) = -2u^3 + 3u^2 = -u^2(2u - 3)$ であるから、接点の x 座標は $t = 0$, $t = \frac{3a}{2}$ である。 $t = 0$ は重解であるが、接線としては 1 本で数える。

2 つの接点を

$$A = (0, a^3), \quad B = \left(\frac{3a}{2}, \left(\frac{3a}{2} \right)^3 - a^2 \cdot \frac{3a}{2} + a^3 \right)$$

とする。 B の y 座標は

$$\frac{27a^3}{8} - \frac{3a^3}{2} + a^3 = \frac{27a^3 - 12a^3 + 8a^3}{8} = \frac{23a^3}{8}$$

である。したがって $A = (0, a^3)$, $B = \left(\frac{3a}{2}, \frac{23a^3}{8} \right)$ である。

また $P = (a, 0)$ なので

$$\overrightarrow{PA} = (-a, a^3), \quad \overrightarrow{PB} = \left(\frac{a}{2}, \frac{23a^3}{8} \right)$$

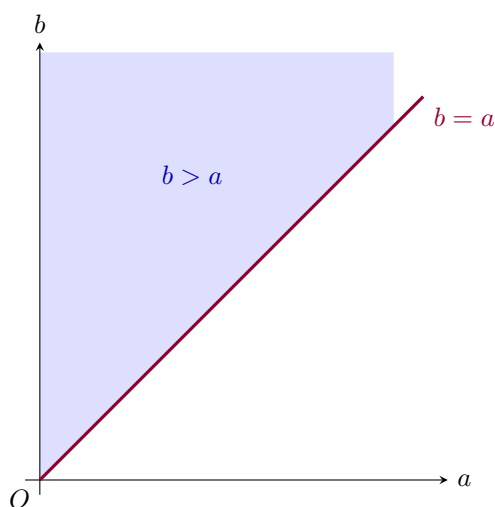
である。角 $\angle APB$ が 90° より小さいことは $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$ と同値である。内積を計算すると

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -\frac{a^2}{2} + \frac{23a^6}{8} = \frac{a^2}{8}(23a^4 - 4).$$

$a > 0$ だから、これは $23a^4 - 4 > 0$ と同値である。よって $a^4 > \frac{4}{23}$, $a > \left(\frac{4}{23} \right)^{1/4}$ である。

以上より条件は $b = a$, $a > \left(\frac{4}{23}\right)^{1/4}$ である。

【3本の接線をもつ領域】



第1象限で直線 $b = a$ より上の領域では、接点方程式が異なる3実根をもつ。

【総評】 難度は10段階中8、計算量は10段階中7。目安時間は35分程度で、接線条件を3次方程式に落とし、実根の個数を極値で判定する総合問題である。接線が「ちょうど2本」の場合は、3次方程式の重解を2本と数えないことが最大の注意点である。(2)では接点座標を最後まで出し、角が鋭角である条件を内積の正負に直すとよい。 $b = a$ だけで終わらず、内積から a の下限まで求める必要がある。

【第3問】

1, 2, 3, 4の数字が1つつ書かれた4枚のカードを用いて、次の手順で5桁の整数をつくる。まず1枚を取り出して現れた数字を1の位とする。取り出した1枚を元に戻し、4枚のカードをよく混ぜて、再び1枚を取り出して現れた数字を10の位とする。このような操作を5回繰り返して、5桁の整数をつくる。得られた整数を X とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) X に数字1がちょうど2回現れる確率を求めよ。
- (2) X に数字1と数字2がちょうど1回ずつ現れる確率を求めよ。
- (3) X にちょうど2回現れる数字が1種類以上ある確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

各位は独立に1, 2, 3, 4の4通りをとるので、全部で 4^5 通りとして数える。指定した数字の出現回数は位置の選び方で処理する。(3)は「ちょうど2回現れる数字が1種類以上ある」の余事象を取り、出現回数の型が5, 0, 0, 0, 4, 1, 0, 0, 3, 1, 1, 0に限られることを使う。

【解答】

5桁の各位は、それぞれ独立に1, 2, 3, 4の4通りをとる。したがって、起こり得る5桁の並びは全部で 4^5 通りであり、いずれも同様に確からしい。

(1) 数字1がちょうど2回現れるには、まず数字1が入る2つの位を選ぶ。これは ${}_5C_2$ 通りである。残り3つの位には、数字1以外の2, 3, 4のいずれかが入るので、各位について3通りである。

したがって求める確率は

$$\frac{{}_5C_2 3^3}{4^5} = \frac{10 \cdot 27}{1024} = \frac{135}{512}$$

である。

(2) 数字1と数字2がちょうど1回ずつ現れる場合を数える。数字1の位置は5通り、数字2の位置は残り4通りである。残り3つの位には、数字1, 2は使えないので、数字3または4の2通りずつが入る。

したがって求める確率は $\frac{5 \cdot 4 \cdot 2^3}{4^5} = \frac{160}{1024} = \frac{5}{32}$ である。

(3) 余事象を数える。すなわち、どの数字も「ちょうど 2 回」は現れない場合を数える。5 個の位に 4 種類の数字が入るので、出現回数の型を考えると、2 を含まない型は $(5, 0, 0, 0)$, $(4, 1, 0, 0)$, $(3, 1, 1, 0)$ に限られる。

型 $(5, 0, 0, 0)$ の場合は、5 回現れる数字を選ぶだけなので 4 通りである。

型 $(4, 1, 0, 0)$ の場合は、4 回現れる数字を 4 通りで選び、1 回現れる数字を残り 3 通りで選ぶ。さらに、1 回現れる数字の位置を 5 通りで選ぶので $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ 通りである。

型 $(3, 1, 1, 0)$ の場合は、3 回現れる数字を 4 通りで選び、1 回ずつ現れる 2 つの数字を残り 3 つから選ぶので ${}_3C_2$ 通りである。位置については、3 回現れる数字の位置を ${}_5C_3$ 通りで選び、残り 2 つの位置に 2 種類の数字を並べるので $2!$ 通りである。したがって

$$4 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_5C_3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 2 = 240$$

通りである。

よって余事象の場合の数は $4 + 60 + 240 = 304$ である。したがって求める確率は

$$1 - \frac{304}{4^5} = 1 - \frac{304}{1024} = \frac{720}{1024} = \frac{45}{64}$$

である。

▶ 解法 2 (包除原理)

【方針】

(1)(2) は指定された数字の位置を直接選ぶ。(3) では、数字 j がちょうど 2 回現れる事象を E_j とし、4 事象の和集合を包除原理で数える。2 種類が各 2 回現れる重なりまで差し引けばよい。

【解答】

(1) 数字 1 の位置を 2 か所選び、残り 3 か所を 2, 3, 4 で埋めるから、確率は

$$\frac{{}_5C_2 3^3}{4^5} = \frac{135}{512}$$

である。

(2) 数字 1 と数字 2 の位置を順に選ぶと $5 \cdot 4$ 通りであり、残り 3 か所には 3 または 4 が入る。よって確率は

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 2^3}{4^5} = \frac{5}{32}$$

である。

(3) 数字 j がちょうど 2 回現れる事象を E_j とする。各 j について

$$|E_j| = {}_5C_2 3^3 = 270$$

である。

異なる 2 数字 i, j がともにちょうど 2 回現れる並びは、 i の 2 位置、 j の 2 位置を選び、残る 1 位置に残り 2 数字のいずれかを置くから

$$|E_i \cap E_j| = {}_5C_2 {}_3C_2 \cdot 2 = 60$$

通りである。3 種類の数字がそれぞれ 2 回現れることは、桁数が 5 なので不可能である。

したがって包除原理より

$$\left| \bigcup_{j=1}^4 E_j \right| = 4 \cdot 270 - {}_4C_2 \cdot 60 = 720.$$

よって求める確率は

$$\frac{720}{4^5} = \frac{45}{64}$$

である。

【総評】 難度は 10 段階中 5、計算量は 10 段階中 5。目安時間は 20 分程度で、独立な 5 回の抽出を 5 桁の並びとして数える基本問題である。(1)(2) は位置を選んで残りの位を埋めるだけだが、(3) は直接数えると重複しやすい。余事象を取り、出現回数の型を先に列挙すると漏れが少ない。特に (3, 1, 1, 0) 型では、1 回ずつ現れる 2 つの数字の並べ方 $2!$ を忘れないことが重要である。

【第 4 問】

四面体 $ABCD$ において、辺 AB の中点を M 、辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式 $|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$ を満たしながら動くとき、点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式 $|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$ を満たしながら動くとき、内積 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。

【方針】

中点 M, N を基準にして、ベクトル和と平方和をそれぞれ整理する。ベクトル和では点 P の位置ベクトルが消えるため、中点 M, N が一致するかどうかの問題になる。点 Q の条件は $QM = QN$ に直し、点 R の条件は中点公式で $RM^2 - RN^2$ に直す。最後は、(2) と (3) で得られる 2 つの平面の方程式を比較して、一致条件を定数項の一致として判定する。

【解答】

(1) 位置ベクトルを用いて考える。任意の点 P に対して

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OP}$$

である。同様に

$$\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OP}$$

である。したがって条件は

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

と同値であり、点 P には依存しない。

ここで M, N はそれぞれ AB, CD の中点だから

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{2}$$

である。よって上の条件は $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$ すなわち $M = N$ を意味する。

しかし、 $M = N$ なら $A = M + \vec{u}$, $B = M - \vec{u}$, $C = M + \vec{v}$, $D = M - \vec{v}$ と書けるので、4 点 A, B, C, D は M を通り $\vec{u}, \vec{v}$ で張られる同一平面上にある。これは四面体であることに反する。したがって条件を満たす点 P は存在しないである。

(2) 中点 M, N を用いると

$$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} = 2\overrightarrow{QM}, \quad \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} = 2\overrightarrow{QN}$$

である。したがって条件

$$|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$$

は $2QM = 2QN$ すなわち $QM = QN$ と同値である。

よって点 Q の軌跡は、2 点 M, N から等距離にある点全体である。したがって線分 MN の垂直二等分平面である。

(3) 中点公式を使う。 M は AB の中点なので $RA^2 + RB^2 = 2RM^2 + \frac{1}{2}AB^2$ である。同様に $RC^2 + RD^2 = 2RN^2 + \frac{1}{2}CD^2$

である。与えられた条件から $2RM^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 2RN^2 + \frac{1}{2}CD^2$ となるので $RM^2 - RN^2 = \frac{CD^2 - AB^2}{4}$ である。

ここで $\overrightarrow{MR} = \vec{r}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{n}$ とおくと $RM^2 = |\vec{r}|^2$, $RN^2 = |\vec{r} - \vec{n}|^2$ である。したがって

$$RM^2 - RN^2 = |\vec{r}|^2 - |\vec{r} - \vec{n}|^2 = 2\vec{n} \cdot \vec{r} - |\vec{n}|^2.$$

すなわち $2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} - MN^2 = \frac{CD^2 - AB^2}{4}$ であるから

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} = \frac{MN^2}{2} + \frac{CD^2 - AB^2}{8}.$$

右辺は四面体によって決まる定数であり、 R のとり方に依存しない。よって $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は一定である。

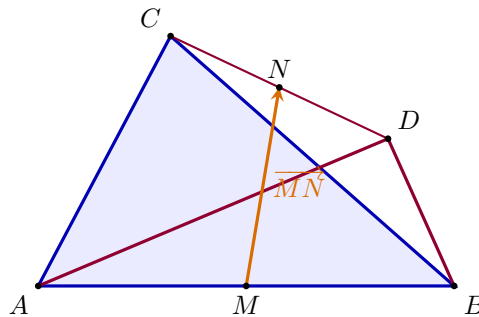
(4) (2) の軌跡を式で表す。点 X が $QM = QN$ に対応する平面上にあることは $XM^2 = XN^2$ と同値である。 $\overrightarrow{MX} = \vec{x}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{n}$ とおくと $|\vec{x}|^2 = |\vec{x} - \vec{n}|^2$ より $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MX} = \frac{MN^2}{2}$ である。

一方、(3) の軌跡は

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MX} = \frac{MN^2}{2} + \frac{CD^2 - AB^2}{8}$$

で表される平面である。四面体では $M \neq N$ なので、この 2 つは同じ法線方向をもつ平行な平面である。したがって両者が一致するための必要十分条件は、右辺の定数が等しいこと、すなわち $\frac{CD^2 - AB^2}{8} = 0$ である。よって $AB^2 = CD^2$ であり、長さは正だから $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ が必要十分条件である。

【中点を結ぶ方向の確認】



2 つの軌跡は、いずれも $\overrightarrow{MN}$ を法線にもつ平面になる。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 6。目安時間は 30 分前後で、ベクトルの和を中点に直す発想と、平方和を中点公式で処理する力が問われる。得点の中心は、(1) で P が消えること、(2) で垂直二等分平面を出すこと、(3) で $RM^2 - RN^2$ を内積に変えることの 3 点である。(4) は 2 つの平面の法線が同じであることを見て、定数項だけを比較すると整理しやすい。 $M = N$ の場合を四面体に反すると説明する部分と、長さ条件を二乗から戻す部分で論証を省かないことが重要である。

【第 5 問】

$0 < t < 3$ のとき、連立不等式 $\begin{cases} 0 \leq y \leq \sin x \\ 0 \leq x \leq t - y \end{cases}$ の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。 $\frac{d}{dt}V(t) = \frac{\pi}{4}$ となる t と、そのときの $V(t)$ の値を求めよ。

【方針】

領域は $0 \leq y \leq \sin x$ と $y \leq t - x$ の共通部分である。上端は $\sin x$ と $t - x$ の小さい方なので、交点 u を $u + \sin u = t$ で定めて積分区間を分ける。体積を $V(t)$ として書いた後、 u も t に依存することに注意して微分するが、交点では $\sin u = t - u$ であるため境界項が打ち消し合う。

【解答】

領域の条件は $0 \leq y \leq \sin x$, $0 \leq x \leq t - y$ である。第 2 の不等式は $y \leq t - x$ と同値である。したがって、固定した x に対する上端は $\min(\sin x, t - x)$ である。

$0 < t < 3 < \pi$ であるから、 $0 \leq x \leq t$ において $x + \sin x$ は単調に増加する。よって $u + \sin u = t$ を満たす u がただ 1 つ存在する。 $0 \leq x \leq u$ では $x + \sin x \leq u + \sin u = t$ より $\sin x \leq t - x$ である。一方、 $u \leq x \leq t$ では $t - x \leq \sin x$ である。したがって、 x 軸のまわりに回転してできる体積は

$$V(t) = \pi \int_0^u \sin^2 x \, dx + \pi \int_u^t (t - x)^2 \, dx$$

である。

これを t で微分する。 u は t の関数であることに注意すると

$$\frac{1}{\pi} \frac{dV}{dt} = \sin^2 u \frac{du}{dt} - (t - u)^2 \frac{du}{dt} + \int_u^t 2(t - x) \, dx.$$

ここで $u + \sin u = t$ より $t - u = \sin u$ なので、最初の 2 項は打ち消し合う。したがって

$$\frac{dV}{dt} = \pi \int_u^t 2(t - x) \, dx = \pi(t - u)^2 = \pi \sin^2 u$$

である。

条件 $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}$ は $\sin^2 u = \frac{1}{4}$ を意味する。 $0 < u < t < 3 < \pi$ であり、また $t = u + \sin u < 3$ を満たす必要がある。

$0 < u < \pi$ で $\sin u = 1/2$ となるのは $u = \frac{\pi}{6}$, $u = \frac{5\pi}{6}$ であるが、 $u = 5\pi/6$ では $t = u + \sin u = \frac{5\pi}{6} + \frac{1}{2} > 3$ となり不適である。よって $u = \frac{\pi}{6}$ であり、 $t = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}$ である。

このとき

$$V = \pi \int_0^{\pi/6} \sin^2 x \, dx + \pi \int_{\pi/6}^{\pi/6+1/2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - x \right)^2 \, dx$$

である。まず

$$\int_0^{\pi/6} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

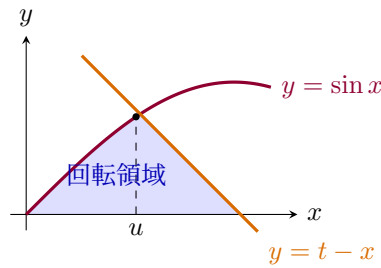
である。また、後半の積分は $s = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - x$ とおくと

$$\int_{\pi/6}^{\pi/6+1/2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - x \right)^2 \, dx = \int_0^{1/2} s^2 \, ds = \frac{1}{24}$$

である。

したがって $V = \pi \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{24} \right)$ である。

【回転する領域の上端】



交点 $u + \sin u = t$ を境に、上端が $\sin x$ から $t - x$ へ切り替わる。

【総評】 難度は 10 段階中 7、計算量は 10 段階中 7。目安時間は 30 分程度で、領域の上端が $\sin x$ から直線 $t - x$ に切り替わる点を正しく置けるかが最大の山である。 $u + \sin u = t$ を導入した後、微分で $u'(t)$ の項が消えるのは交点条件 $t - u = \sin u$ のためであり、ここを説明できると答案の信頼度が上がる。 $\sin u = 1/2$ では $5\pi/6$ も候補に見えるが、 $t < 3$ を満たさないので除外する必要がある。

【第 6 問】

xy 平面において、原点を中心とし $P(1, 0)$ を頂点の 1 つとする正六角形を X とする。 A を 2 次の正方行列とし、 X の各頂点 (x, y) に対して、行列 A の表す移動

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で得られる点 (x', y') は X の边上の点（頂点を含む）であるとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が行列 A の表す移動で P 自身に移るとき、 X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また、そのときの行列 A を求めよ。

(2) 点 P が行列 A の表す移動で X のある頂点に移るとき、 X の各頂点は X のいずれかの頂点に移ることを示せ。また、そのときの行列 A を求めよ。

【方針】

正六角形の頂点を、 $P = (1, 0)$ とその 60 度回転で表す。 P が固定される場合は、隣の頂点 Q と $Q - P$ の像を利用し、 AQ と $AQ - P$ がともに正六角形の边上にある点を調べる。これにより AQ が上下どちらかの隣接頂点に限られる。 P が任意の頂点に移る場合は、正六角形の回転対称性を使って、いったん P が固定される場合に戻す。

【解答】

正六角形 X の頂点を

$$(1, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (-1, 0), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とする。また $P = (1, 0)$, $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおく。

(1) $AP = P$ とする。点 $Q - P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ も X の頂点であるから、仮定より AQ と $A(Q - P) = AQ - AP = AQ - P$ はいずれも X の边上にある。

ここで、正六角形の 6 本の辺を座標で調べると、点 Y と点 $Y - P$ がともに X の边上にあるような点 Y は

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

に限られる。実際、 X と $P + X$ の共通部分で、両方の境界上にある点はこの 2 点である。

したがって $AQ = Q$ または $AQ = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。 P, Q は同一直線上にないので、 P, Q の像が決まれば行列 A は一意に決まる。

$AQ = Q$ のとき, P, Q がともに固定されるので

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

$AQ = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ のとき, P は固定され, Q は x 軸に関して対称な頂点に移る。よって

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

以上の 2 つはいずれも正六角形の頂点を頂点に移す。したがって, P が P 自身に移るとき, X の各頂点は X のいずれかの頂点に移り, 行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

(2) P の像が X のある頂点であるとする。原点を中心とする角 $k\pi/3$ の回転を表す行列を

$$R_k = \begin{pmatrix} \cos \frac{k\pi}{3} & -\sin \frac{k\pi}{3} \\ \sin \frac{k\pi}{3} & \cos \frac{k\pi}{3} \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

とする。 AP はある頂点なので, ある k によって $AP = R_k P$ と書ける。

このとき $R_k^{-1} A$ を考える。回転 R_k^{-1} は正六角形 X をそれ自身に移すので, A による像が X の辺上にあるという条件は保たれる。また $(R_k^{-1} A)P = P$ である。したがって (1) より $R_k^{-1} A = I$ または

$$R_k^{-1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

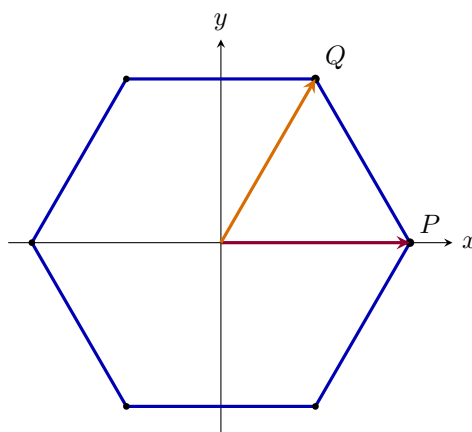
である。

よって

$$A = R_k \quad \text{または} \quad A = R_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

である。これらは回転または回転と x 軸対称の合成であり, いずれも正六角形の頂点を正六角形の頂点に移す。したがって, この場合も X の各頂点は X のいずれかの頂点に移る。

【正六角形の基準頂点】



一次変換は、一次独立な P, Q の像が決まれば一意に定まる。

【総評】 難度は 10 段階中 8、計算量は 10 段階中 7。目安時間は 35 分程度で、行列計算だけで押し切るより、正六角形の対称性を使うと見通しがよい。(1) では P が固定されると第 1 列が決まるため、隣接頂点 Q の像を絞ればよい。 AQ と $AQ - P$ がともに辺上にあるという条件が決定打である。(2) は任意の頂点への移動を回転で戻して (1) に帰着する。答えは 12 個の変換を R_k でまとめて書けば過不足がない。