

東北大学 2012 年度 文系

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a を正の実数とし、 $a \neq \frac{1}{2}$ とする。曲線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ と $Q(a, a^2)$ をとる。点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし、点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする。 l と m の交点が C 上にあるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 2 直線 l , m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ。

【方針】

放物線 $y = x^2$ の $x = t$ における法線を一般式で表し、 P と Q に対応する 2 本の法線の交点を求める。その交点が再び放物線上にある条件を、 $u = a^2 + a/2$ の二次方程式として整理して a を決める。(2) は $a = 1$ のときの 2 本の法線と放物線の位置関係を確認し、右半平面 $x \geq 0$ に現れる部分を $[0, 1/2]$ と $[1/2, 1]$ に分けて面積を積分する。

【解答】

(1) 曲線 $C: y = x^2$ の $x = t$ における接線の傾きは $2t$ である。したがって $t \neq 0$ のとき、法線の傾きは $-1/(2t)$ であり、法線の方程式は $y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$ すなわち $y = -\frac{x}{2t} + t^2 + \frac{1}{2}$ である。

点 P は $t = 1/2$ に対応するので $l: y = -x + \frac{3}{4}$ である。また点 $Q(a, a^2)$ における法線は $m: y = -\frac{x}{2a} + a^2 + \frac{1}{2}$ である。

2 直線の交点の x 座標を求める。 $a \neq 1/2$ より 2 直線は一致せず、 $-x + \frac{3}{4} = -\frac{x}{2a} + a^2 + \frac{1}{2}$ から $x = -a^2 - \frac{a}{2}$ を得る。このとき l 上の y 座標は $y = a^2 + \frac{a}{2} + \frac{3}{4}$ である。

交点が放物線 C 上にあるから $\left(a^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a}{2} + \frac{3}{4}$ である。ここで $u = a^2 + \frac{a}{2}$ とおくと、 $a > 0$ より $u > 0$ であり、 $u^2 = u + \frac{3}{4}$ すなわち $(u - \frac{3}{2})(u + \frac{1}{2}) = 0$ である。 $u > 0$ だから $u = \frac{3}{2}$ である。よって $a^2 + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}$ すなわち $2a^2 + a - 3 = 0$ である。 $a > 0$ なので $a = 1$ である。

(2) $a = 1$ のとき $l: y = -x + \frac{3}{4}$, $m: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ である。右側部分では、 $x = 0$ から $x = 1/2$ までは 2 直線にはさまれ、 $x = 1/2$ から $x = 1$ までは直線 m と放物線にはさまれる。

したがって求める面積は

$$\int_0^{1/2} \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) - \left(-x + \frac{3}{4} \right) \right\} dx + \int_{1/2}^1 \left\{ \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) - x^2 \right\} dx$$

である。第 1 項は

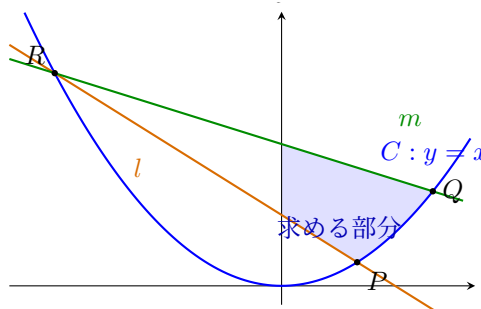
$$\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x \right]_0^{1/2} = \frac{7}{16}$$

である。第 2 項は

$$\int_{1/2}^1 \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{1/2}^1 = \frac{13}{48}$$

である。よって面積は $\frac{7}{16} + \frac{13}{48} = \frac{17}{24}$ である。

2本の法線と、面積を求める右半平面の位置関係は次のようになる。



【総評】 難度 6、目安時間 28 分。法線の一般式を正しく作り、交点が放物線上にある条件を丁寧に整理する問題である。(1) では $a \neq 1/2$ により 2 本の法線を交点計算できること、 $a > 0$ により $u = -1/2$ を捨てることが重要である。(2) は右半平面だけを求めるため、面積の下側が直線から放物線へ切り替わる $x = 1/2$ で分割するのが採点上の要点になる。

【第 2 問】

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \left| 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} \right|$$

と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ とおく。 $f(x)$ を t の関数として表せ。
- (2) x が $0 \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) x が $0 \leq x \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき、 $f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。また、 $f(x)$ が最大値をとる x は、 $60^\circ < x < 75^\circ$ を満たすことを示せ。

【方針】

まず $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ の二乗を計算し、絶対値の中身を $t^2 + t - 9/4$ に変形する。次に $t = 2\cos(x + 30^\circ)$ として、 $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ における t の範囲を単調性から求める。最後は区間 $[-1, \sqrt{3}]$ 上で $|t^2 + t - 9/4|$ の最大最小を調べ、最大をとる $t = -1/2$ から対応する x の範囲を示す。

【解答】

(1) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x$ とおく。二乗すると $t^2 = \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 3\cos^2 x$ である。 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を用いると $t^2 = 1 + 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x$ である。したがって絶対値の中身は $2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \sin x + \sqrt{3}\cos x - \frac{5}{4} = (t^2 - 1) + t - \frac{9}{4} = t^2 + t - \frac{9}{4}$ となる。よって $f(x) = |t^2 + t - \frac{9}{4}|$ である。

(2) $t = -\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\cos(x + 30^\circ)$ である。 $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ のとき $30^\circ \leq x + 30^\circ \leq 120^\circ$ であり、この範囲で $\cos$ は単調減少する。したがって $2\cos 120^\circ \leq t \leq 2\cos 30^\circ$ すなわち $-1 \leq t \leq \sqrt{3}$ である。

(3) $g(t) = t^2 + t - \frac{9}{4}$ とおく。 $-1 \leq t \leq \sqrt{3}$ で考えると、 $g(t)$ は $t = -1/2$ で最小値 $g(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2}$ をとる。また $g(-1) = -\frac{9}{4}$ 、 $g(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \frac{3}{4}$ である。さらに $g(t) = 0$ の正の解 $t = \frac{-1 + \sqrt{10}}{2}$ は $[-1, \sqrt{3}]$ に含まれるので、 $|g(t)|$ の最小値は 0 である。

一方、 $|g(t)|$ の最大値は、 g の最小値の絶対値と端点の絶対値を比べればよい。上の値から最大は $|\frac{5}{2}| = \frac{5}{2}$ である。したがって $0 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$ である。

最大値をとるのは $t = -\frac{1}{2}$ のときである。すなわち $2\cos(x + 30^\circ) = -\frac{1}{2}$ であるから $\cos(x + 30^\circ) = -\frac{1}{4}$ である。このとき $x + 30^\circ > 90^\circ$ なので $x > 60^\circ$ である。また $\cos 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} < -\frac{1}{4}$ であり、 $\cos$ は $[30^\circ, 120^\circ]$ で単調減少する。 $\cos(x + 30^\circ) = -1/4$ は $\cos 105^\circ$ より大きいから $x + 30^\circ < 105^\circ$ である。よって $60^\circ < x < 75^\circ$ を満たす。

【総評】 難度 5、目安時間 25 分。三角式をそのまま扱わず、指定された t によって絶対値付き二次関数へ落とす問題である。 $t = 2\cos(x + 30^\circ)$ の範囲を単調性で出すこと、 $|g(t)|$ の最大では二次関数の頂点と端点を比較することが重要である。最後の $60^\circ < x < 75^\circ$ は、最大値をとる条件 $t = -1/2$ から角度範囲へ戻す部分まで書くと説得力が出る。

【第 3 問】

袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

- (1) $N = 4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする。 $X = 1, X = 2, X = 3, X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また, X の期待値を求めよ。
- (2) $N = 3$ とし, n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, それらのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。 p_n と q_n を求めよ。

【方針】

(1) は袋 A の取り出し順を固定し, 袋 B の取り出し順を 4 文字の順列として見る。数字が一致した回数は順列の固定点数なので, 固定点がちょうど 1 個, 2 個, 3 個, 4 個の場合を, 残りの完全不一致の並べ方まで含めて数える。期待値は各回の一致を表す指示変数の和として求める。(2) は, 残り 3 枚のときの一致確率が $1/3$, 残り 2 枚のときの一致確率が $1/2$, 残り 1 枚では必ず一致することを使い, 待ち時間の和として p_n, q_n を表す。

【解答】

(1) 袋 A の取り出し順を固定してよい。このとき袋 B の取り出し順は 1, 2, 3, 4 の順列であり, 同じ回と同じ数字が出る回数 X は, その順列の固定点の個数である。全体は $4! = 24$ 通りである。

固定点がちょうど 1 個の順列を数える。固定する位置は ${}_4C_1$ 通りで, 残り 3 個は固定点をもたないように並べる。3 個の完全不一致の並べ方は (231), (312) の 2 通りであるから, ${}_4C_1 \cdot 2 = 8$ 通りである。

固定点がちょうど 2 個の順列では, 固定する 2 位置を選ぶと, 残り 2 個は互いに入れ替わるしかない。したがって ${}_4C_2 = 6$ 通りである。固定点がちょうど 3 個なら残り 1 個も固定されてしまうので, これは 0 通りである。固定点が 4 個は恒等順列の 1 通りである。

よって

$$P(X = 1) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}, \quad P(X = 2) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4},$$

$P(X = 3) = 0, \quad P(X = 4) = \frac{1}{24}$ である。

期待値は指示変数で求めると速い。 i 回目に数字が一致すれば 1、一致しなければ 0 となる変数を Y_i とすると $X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$ である。各回で袋 B の該当カードがその位置に来る確率は $1/4$ だから $E(Y_i) = \frac{1}{4}$ である。したがって $E(X) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ である。

(2) 最初は 3 枚ずつ残っている。1 回の操作で一致する確率は $1/3$ 、一致しない確率は $2/3$ である。カードが初めて取り除かれるのが n 回目であるには, 最初の $n - 1$ 回が不一致で, n 回目が一一致すればよい。よって $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}$ である。

次に q_n を求める。すべてのカードが取り除かれるには, まず残り 3 枚の状態ですべて一致するまで待ち, 次に残り 2 枚の状態ですべて一致するまで待ち, 最後に残り 1 枚の状態ですべて一致する。最後の 1 枚は必ず一致する。

残り 3 枚で初めて一致するまでの回数を i とすると, その確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{3}$ である。残り 2 枚で初めて一致するまでの回数を j とすると, その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \frac{1}{2}$ である。全体で n 回目にすべて取り除かれるには $i + j + 1 = n$ である。したがって $n \geq 3$ のとき

$$q_n = \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-i} \frac{1}{2}$$

である。 $j = i - 1$ と置き直すと

$$q_n = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{n-3} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3-j}$$

であり, 等比数列の和から $q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ となる。よって

$$q_n = 0 \quad (n = 1, 2), \quad q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \quad (n \geq 3)$$

【総評】 難度 7、目安時間 31 分。(1) は順列の固定点を数える問題で、固定点が 3 個だけという場合が存在しない理由を明記するとよい。期待値は分布から計算してもよいが、各回の一致確率を足す方が短く確実である。(2) は「残り枚数が変わるたびに一致確率が変わる」点が核心で、残り 3 枚・2 枚・1 枚の待ち時間を分けて書くと、 q_n の和の範囲と $n = 1, 2$ の例外を落としにくい。

【第 4 問】

平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$$

を満たすとする。ただし、記号 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 p, q に対して、 $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく。このとき、次の条件

$$|\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \quad p > 0$$

を満たす実数 p, q を求めよ。

(2) 平面上のベクトル $\vec{x}$ が

$$-1 \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq 1, \quad 1 \leq \vec{b} \cdot \vec{x} \leq 2$$

を満たすとき、 $|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。

【方針】

(1) は $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ を内積条件に代入し、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ から $q = 2p$ を得て、長さ条件で p, q を決める。(2) は $u = \vec{a} \cdot \vec{x}$, $v = \vec{b} \cdot \vec{x}$ と置き、 $|\vec{x}|^2$ を u, v で表す。長方形 $-1 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 2$ 上で二次式 $u^2 + uv + v^2$ の最小・最大を調べる。

【解答】

(1) $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とする。 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1/2$ より $\vec{a} \cdot \vec{c} = p\vec{a} \cdot \vec{a} + q\vec{a} \cdot \vec{b} = p - \frac{q}{2}$ である。条件 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ から $q = 2p$ を得る。

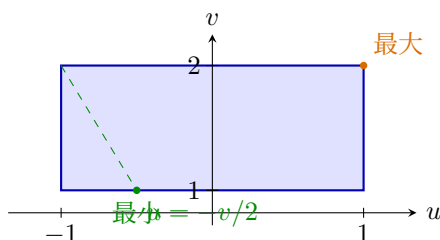
また $|\vec{c}|^2 = (p\vec{a} + q\vec{b}) \cdot (p\vec{a} + q\vec{b}) = p^2 + q^2 - pq$ である。 $q = 2p$ を代入すると $|\vec{c}|^2 = p^2 + 4p^2 - 2p^2 = 3p^2$ である。 $|\vec{c}| = 1$, $p > 0$ より $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。したがって $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$ である。

(2) $u = \vec{a} \cdot \vec{x}$, $v = \vec{b} \cdot \vec{x}$ とおく。 $\vec{a}, \vec{b}$ は平行でないので、 $\vec{x} = r\vec{a} + s\vec{b}$ と表せる。このとき $u = r - \frac{s}{2}$, $v = -\frac{r}{2} + s$ である。これを解くと $r = \frac{4}{3}u + \frac{2}{3}v$, $s = \frac{2}{3}u + \frac{4}{3}v$ である。

したがって $|\vec{x}|^2 = r^2 + s^2 - rs$ に代入して $|\vec{x}|^2 = \frac{4}{3}(u^2 + uv + v^2)$ を得る。条件は $-1 \leq u \leq 1$, $1 \leq v \leq 2$ である。 v を固定すると、 $u^2 + uv + v^2 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2$ である。 $1 \leq v \leq 2$ では $-v/2$ が $[-1, 1]$ に入るので、固定した v に対する最小は $u = -v/2$ のときである。このとき値は $3v^2/4$ であり、 $1 \leq v \leq 2$ で最小となるのは $v = 1$ のときである。よって $|\vec{x}|_{\min}^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$ である。

最大値は凸な二次式の長方形上の最大なので、頂点で調べればよい。4 頂点で $u^2 + uv + v^2 = 1, 3, 3, 7$ となり、最大は $(u, v) = (1, 2)$ のときの 7 である。したがって $|\vec{x}|_{\max}^2 = \frac{4}{3} \cdot 7 = \frac{28}{3}$ である。以上より $1 \leq |\vec{x}| \leq \frac{2\sqrt{21}}{3}$ である。

$(u, v) = (\vec{a} \cdot \vec{x}, \vec{b} \cdot \vec{x})$ 平面では、許される範囲は長方形になる。



【総評】 難度 6、目安 28 分。 $u = \vec{a} \cdot \vec{x}$, $v = \vec{b} \cdot \vec{x}$ と置けば、長さの範囲は長方形上の二次式の最大最小になる。最小では $u = -v/2$ が許容範囲に入ること、最大では 4 頂点を比較することを確認する。