

東北大学 2012 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 x, y が $4^x - 4 \cdot 2^x + 9^y - 2 \cdot 3^y \leq -1$ を満たすとき、 $2^x + 3^y$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) 実数 x, y が $4^x - 2 \cdot 2^x + 2^y \leq 0$ を満たすとき、 $x + y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

【方針】

指数部分を正の変数に置き換える。(1) は $u = 2^x, v = 3^y$ として、条件を中心 $(2, 1)$ 、半径 2 の円板に直す。求める $u + v$ の最大は円の中心から $(1, 1)$ 方向へ進んだ点でとり、最小側は $u > 0, v > 0$ という開いた条件のため下限が達成されないことに注意する。(2) は $u = 2^x, w = 2^y$ として $2^{x+y} = uw$ の最大化に帰着し、 $u(2u - u^2)$ を微分する。

【解答】

(1) $u = 2^x, v = 3^y$ とおく。すると $u > 0, v > 0$ であり、条件は $u^2 - 4u + v^2 - 2v \leq -1$ である。平方完成すると $(u - 2)^2 + (v - 1)^2 \leq 4$ となる。求める量は $2^x + 3^y = u + v$ である。

円板の中心は $(2, 1)$ 、半径は 2 である。 $u + v$ は方向 $(1, 1)$ に進むほど大きくなるから、最大値は中心から $(1, 1)$ 方向へ距離 2 だけ進んだ点でとる。そのとき $(u + v)_{\max} = 2 + 1 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ である。

最小側については、中心から $(-1, -1)$ 方向へ進んだ点は $v < 0$ となり、 $v > 0$ の条件に合わない。したがって境界 $v = 0$ に近づけて考える。 $v = 0$ とすると $(u - 2)^2 + 1 = 4$ より、最小側の u は $u = 2 - \sqrt{3}$ である。ただし実際には $v = 3^y > 0$ なので $v = 0$ は達成できない。よって下限は $2 - \sqrt{3}$ であるが、最小値としては取れない。

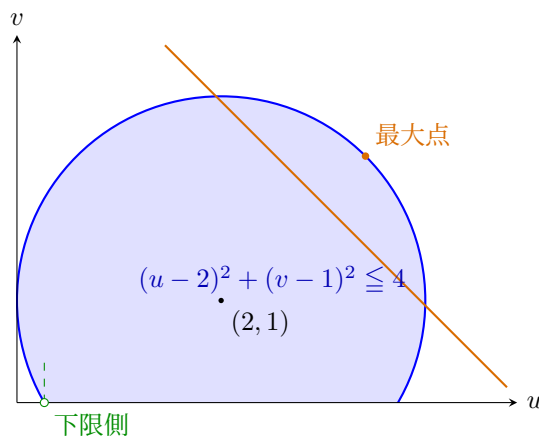
以上より $2 - \sqrt{3} < 2^x + 3^y \leq 3 + 2\sqrt{2}$ である。

(2) $u = 2^x, w = 2^y$ とおく。すると $u > 0, w > 0$ であり、条件は $u^2 - 2u + w \leq 0$ すなわち $w \leq 2u - u^2$ である。右辺が正でなければならないので $0 < u < 2$ である。

求める $x + y$ は $x + y = \log_2(2^x 2^y) = \log_2(uw)$ である。 $\log_2$ は増加関数なので、 uw の最大値を求めればよい。条件から $uw \leq u(2u - u^2) = 2u^2 - u^3$ である。微分すると $(2u^2 - u^3)' = 4u - 3u^2 = u(4 - 3u)$ であるから、 $0 < u < 2$ で最大となるのは $u = \frac{4}{3}$ のときである。このとき $uw \leq 2 \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{32}{27}$ であり、等号は $w = 2u - u^2$ のとき実現できる。

一方、 $w > 0$ はいくらでも 0 に近づけられるので、 uw も 0 に近づき、 $x + y$ に下限はない。したがって $x + y \leq \log_2 \frac{32}{27}$ であり、下には限りがない。

(1) の置換後は、第 1 象限内の円板上で直線 $u + v = \text{一定}$ を動かす問題になる。



【総評】 難度 6、目安時間 28 分。指数を正の変数に置き換えると、(1) は円板上の一次式、(2) は一変数の最大化になる。(1) では $u > 0, v > 0$ が開条件であるため下限が達成されない点が重要である。(2) では $x + y$ を直接扱うのではなく $2^{x+y} = uw$ を最大化すると、微分すべき式が $2u^2 - u^3$ に整理される。

【第 2 問】

a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする。座標平面内で、3 つの不等式

$$x \leq a, \quad y \geq a, \quad y \leq -x^2 + 2x$$

の表す領域の面積を $S(a)$ とおく。 $S(a)$ が最大となる a の値を求めよ。

【方針】

領域は $y = a$ と放物線 $y = -x^2 + 2x$ の間で、さらに $x \leq a$ の左側に限られる。まず $-x^2 + 2x \geq a$ の左側の交点 $1 - \sqrt{1-a}$ を求め、これが a 以下であることを確認して積分範囲を決める。面積 $S(a)$ を積分で表し、上端の被積分関数が 0 になることを使って微分し、 $u = \sqrt{1-a}$ で方程式を解く。

【解答】

領域が存在するには、放物線の上端 $y = -x^2 + 2x$ が水平線 $y = a$ 以上でなければならない。すなわち $-x^2 + 2x \geq a$ である。これを解くと $(x-1)^2 \leq 1-a$ なので、 x は $1 - \sqrt{1-a} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-a}$ を満たす。

さらに条件 $x \leq a$ がある。 $0 < a < 1$ において $1 - \sqrt{1-a} \leq a$ は $1-a \leq \sqrt{1-a}$ であり、これは $0 < 1-a < 1$ から成り立つ。したがって面積は

$$S(a) = \int_{1-\sqrt{1-a}}^a \{-x^2 + 2x - a\} dx$$

である。

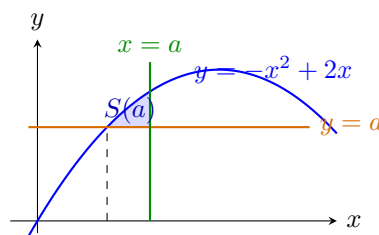
微分する。下端では被積分関数が 0 であり、上端 $x = a$ での被積分関数は $-a^2 + 2a - a = a - a^2$ である。また被積分関数の a による微分は -1 なので

$$S'(a) = a - a^2 - \int_{1-\sqrt{1-a}}^a 1 dx$$

である。よって $S'(a) = a - a^2 - \{a - (1 - \sqrt{1-a})\} = 1 - \sqrt{1-a} - a^2$ である。 $u = \sqrt{1-a}$ とおくと、 $0 < u < 1$ 、 $a = 1 - u^2$ である。 $S'(a) = 0$ は $1 - u - (1 - u^2)^2 = 0$ すなわち $1 - u - (1 - 2u^2 + u^4) = 2u^2 - u - u^4 = 0$ である。 $u > 0$ より、両辺を u で割って符号を変えると $u^3 - 2u + 1 = 0$ を得る。因数分解して $(u-1)(u^2 + u - 1) = 0$ である。 $0 < u < 1$ だから $u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ である。

このとき $a = 1 - u^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ である。 $a \rightarrow 0+$ 、 $a \rightarrow 1-$ では領域の面積は 0 に近づき、内部の停留点は 1 つだけなので、ここで最大となる。したがって $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ である。

面積は、放物線と水平線の左交点から直線 $x = a$ までの青色部分である。



【総評】 難度 6、目安時間 28 分。面積の積分範囲を決めるところが核心である。 $x \leq a$ があるため、放物線と水平線の左交点から $x = a$ までを積分することになる。微分では下端の被積分関数が 0 になるので、端点微分の項を落ち着いて処理したい。 $u = \sqrt{1-a}$ の置換後は、 $0 < u < 1$ にある解だけを採用する。

【第 3 問】

空間内に 4 点 $A(0, 0, 1)$, $B(3, 1, 1)$, $C(1, 4, 4)$, $D(1, 1, 2)$ がある。点 A を含み、直線 AD に垂直な平面を L とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < t < 1$ に対し、線分 BC を $t : (1-t)$ に内分する点を N とする。点 N から平面 L に下ろした垂線と L の交点を H とするとき、点 H の座標を求めよ。
- (2) P を平面 L 上を動く点とすると、 $2PB^2 + PC^2$ の最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は平面 L の法線が $\overrightarrow{AD} = (1, 1, 1)$ であることから、平面方程式 $x + y + z = 1$ を作る。内分点 $N = (1-t)B + tC$ を求め、法線方向に平面まで下ろして H を出す。(2) は重み付きの中点公式を使い、 $2PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + \text{定数の形に直す}$ 。あとは点 $G = (2B + C)/3$ から平面 L までの距離を求めればよい。

【解答】

(1) $\overrightarrow{AD} = (1, 1, 1)$ であるから、点 $A(0, 0, 1)$ を通り AD に垂直な平面 L は $x + y + z = 1$ である。

点 N は線分 BC を $t : (1-t)$ に内分するので $N = (1-t)B + tC$ である。したがって $N = (1-t)(3, 1, 1) + t(1, 4, 4) = (3-2t, 1+3t, 1+3t)$ である。 N から平面 L へ下ろす垂線は法線方向 $(1, 1, 1)$ に平行であるから $H = N - \lambda(1, 1, 1)$ とおける。 H が $x + y + z = 1$ 上にある条件は $(3-2t-\lambda) + (1+3t-\lambda) + (1+3t-\lambda) = 1$ である。よって $5+4t-3\lambda = 1$ から $\lambda = \frac{4+4t}{3}$ である。したがって

$$H = \left(\frac{5-10t}{3}, \frac{-1+5t}{3}, \frac{-1+5t}{3} \right)$$

である。

(2) 重み付きの中心 $G = \frac{2B+C}{3}$ を考える。計算すると $G = (\frac{7}{3}, 2, 2)$ である。任意の点 P について $2PB^2 + PC^2 = 3PG^2 + (2GB^2 + GC^2)$ が成り立つ。ここで $\overrightarrow{BC} = (-2, 3, 3)$, $BC^2 = 22$ であり、 $GB = BC/3$, $GC = 2BC/3$ だから $2GB^2 + GC^2 = 2 \cdot \frac{22}{9} + \frac{4 \cdot 22}{9} = \frac{44}{3}$ である。

したがって、 $2PB^2 + PC^2$ を最小にするには、平面 L 上の P について PG を最小にすればよい。これは G から平面 L へ下ろした垂線の足で起こる。

点 G について $\frac{7}{3} + 2 + 2 - 1 = \frac{16}{3}$ であるから、平面 $x + y + z = 1$ までの距離の 2 乗は $\frac{(16/3)^2}{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{256}{27}$ である。よって求める最小値は $3 \cdot \frac{256}{27} + \frac{44}{3} = \frac{388}{9}$ である。

▶ 解法 2 (平面上の座標で平方完成)

【方針】

平面 L を $z = 1 - x - y$ と表して点 P の自由度を 2 つにする。(1) は法線方向への射影を計算し、(2) は目的式を x, y の正定値 2 次式として展開して平方完成する。

【解答】

(1) $\overrightarrow{AD} = (1, 1, 1)$ だから

$$L: x + y + z = 1.$$

また

$$N = (1-t)B + tC = (3-2t, 1+3t, 1+3t).$$

垂線の足を $H = N - \lambda(1, 1, 1)$ とおく。 $H \in L$ より

$$5 + 4t - 3\lambda = 1, \quad \lambda = \frac{4+4t}{3}.$$

したがって

$$H = \left(\frac{5-10t}{3}, \frac{-1+5t}{3}, \frac{-1+5t}{3} \right).$$

(2) $P = (x, y, z) \in L$ とすると $z = 1 - x - y$ である。これを直接代入して整理すると

$$2PB^2 + PC^2 = 6x^2 + 6xy + 6y^2 - 8x - 6y + 46.$$

$$u = x - \frac{5}{9}, \quad v = y - \frac{2}{9}$$

と置けば

$$2PB^2 + PC^2 = 6u^2 + 6uv + 6v^2 + \frac{388}{9}.$$

ここで

$$6u^2 + 6uv + 6v^2 = 3(u + v)^2 + 3u^2 + 3v^2 \geq 0$$

であり、等号は $u = v = 0$ のときに成立する。よって最小値は

$$\frac{388}{9}$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 28 分。文系後期第 4 問の中点を、重み 2 : 1 の中心へ一般化した問題である。(1) は射影計算を丁寧に行えばよい。(2) は $2PB^2 + PC^2$ を点 $(2B + C)/3$ からの距離に変換できるかが勝負で、展開してもよいが、重み付き中心を使うと計算がかなり短くなる。重み付き中心による解法に加え、平面の式を代入して正定値 2 次式を平方完成する独立答案も用意した。

【第 4 問】

$0 < p < 1$ とする。数直線上を次の規則に従って動く点 Q を考える。

- (i) 時刻 0 に Q は原点にある。
- (ii) 時刻 n ($n = 0, 1, 2, \dots$) における Q の座標が x であるとき、時刻 $n + 1$ に Q は、確率 p で座標が $x + 1$ である点に移動し、確率 $1 - p$ で座標が $x + 2$ である点に移動する。

時刻 k における Q の座標を X_k で表し、 $n \geq 1$ に対し、数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ を点 Q の時刻 n までの訪問点とよぶことにする。以下の問いに答えよ。

- (1) 4 と 6 がともに Q の時刻 6 までの訪問点となる確率を求めよ。
- (2) m を自然数とする。3 から $3m$ までの 3 の倍数 $3, \dots, 3m$ のいずれも Q の時刻 $3m$ までの訪問点とならない確率を求めよ。

【方針】

点 Q は右へ 1 または 2 だけ進むので、訪問点は単調に増える。(1) は 4 を訪問するまでの増分列を数え、その後 4 から 6 を訪問するための増分が 2 または $1 + 1$ であることを掛ける。(2) は 3 の倍数を訪問しないためには、各 3 の倍数を直前の点から 2 歩で飛び越す必要があると見る。最初に 1 へ進む型と 2 へ進む型に分け、最後の $3m$ を飛び越した後の残り時間は任意に動いてよいことも含めて確率をまとめる。

【解答】

(1) 4 を訪問するには、1 歩または 2 歩の増分の和が初めて 4 になればよい。4 を 1, 2 の和で表す列は $1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 2$ の並べ替え, $2 + 2$ である。したがって 4 を訪問する確率は $p^4 + 3p^2(1 - p) + (1 - p)^2$ である。

4 を訪問した後、6 を訪問するには、4 から一度に 2 進むか、1 ずつ 2 回進めばよい。したがってその条件付き確率は $(1 - p) + p^2$ である。4 を訪問する時刻は高々 4 であり、その後 2 回以内に 6 へ到達するので、時刻 6 までという条件にも合う。

よって求める確率は $\{p^4 + 3p^2(1 - p) + (1 - p)^2\}\{(1 - p) + p^2\}$ である。

(2) 3 の倍数を訪問しないためには、各 3 の倍数を飛び越さなければならない。3 の倍数の直前、すなわち $3j - 1$ にいるときは、次に 2 進めば $3j + 1$ に移り、 $3j$ を訪問しないで済む。一方、 $3j - 2$ から 2 進むと $3j$ に着いてしまうので不適である。

最初に 1 進む型を考える。位置 1 から始めると、3 を避けるためには次に 1 進んで 2 へ行き、その次に 2 進んで 4 へ行く必要がある。同じことを繰り返すと、 $3, 6, \dots, 3m$ をすべて飛び越すまでに、増分 1 が $m + 1$ 回、増分 2 が m 回必要である。

その確率は $p^{m+1}(1-p)^m$ である。最後の $3m$ を飛び越した後、時刻 $3m$ までに残った操作はどちらを選んでも、もはや $3, 6, \dots, 3m$ には戻らない。

次に最初に 2 進む型を考える。位置 2 から始まると、3 を避けるために次は 2 進んで 4 へ行く。その後は同様に進み、 $3, 6, \dots, 3m$ をすべて飛び越すまでに、増分 1 が $m-1$ 回、増分 2 が $m+1$ 回必要である。その確率は $p^{m-1}(1-p)^{m+1}$ である。

したがって求める確率は $p^{m+1}(1-p)^m + p^{m-1}(1-p)^{m+1}$ であり、まとめて $p^{m-1}(1-p)^m\{p^2 + (1-p)\}$ である。

【総評】 難度 7、目安時間 31 分。訪問点が単調に増えることを使い、特定の点を「着地せずに飛び越す」条件へ変えるのが重要である。(1) は 4 までの増分列を数えた後、4 から 6 への到達を掛ければよい。(2) は剰余だけで考えると、3 の倍数を避ける安全な進み方が 2 型に分かれる。最後の $3m$ を飛び越した後の残り操作は自由になるため、そこを余分に数えないことがポイントである。

【第 5 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 θ に対し、

$$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \beta = \cos \theta - i \sin \theta$$

とおく。すべての自然数 n に対して、

$$\alpha^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad \beta^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

が成り立つことを示せ。ただし、 i は虚数単位を表す。

- (2) $\theta = \frac{2\pi}{7}$ とし、(1) で定めた α, β を考える。 $\alpha^7 = 1$ を示せ。また、 k, l は自然数で $k+l$ が 7 の倍数のとき、 $\alpha^k = \beta^l$ となることを示せ。

- (3) $\theta = \frac{2\pi}{7}$ とし、(1) で定めた α, β を考える。

$$A = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \quad B = \beta + \beta^2 + \beta^4$$

とおいたとき、 $A+B, AB$ の値を求めよ。

- (4) $\theta = \frac{2\pi}{7}$ のとき、 $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$ の値を求めよ。

【方針】

(1) は加法定理を用いた帰納法でド・モアブル型の公式を示す。(2) では $\theta = 2\pi/7$ から $\alpha^7 = 1$ と $\beta = \alpha^{-1}$ を使う。(3) は B を α の負の指数、つまり $\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3$ と見直し、7 乗根の和 $1 + \alpha + \dots + \alpha^6 = 0$ で $A+B, AB$ を求める。(4) は A の虚部を求める問題に変換する。

【解答】

(1) $n = 1$ では定義そのものである。ある自然数 n で $\alpha^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ が成り立つと仮定する。このとき $\alpha^{n+1} = (\cos n\theta + i \sin n\theta)(\cos \theta + i \sin \theta)$ である。加法定理を用いると $\alpha^{n+1} = \cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta$ となる。したがって帰納法により、すべての自然数 n で成り立つ。 β についても同様に、または i を $-i$ に置き換えて同じ議論により $\beta^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$ が成り立つ。

(2) $\theta = 2\pi/7$ であるから、(1) より $\alpha^7 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ である。また $\alpha\beta = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = 1$ なので $\beta = \alpha^{-1}$ である。 $k+l$ が 7 の倍数であるとする。このとき $k+l = 7r$ と書ける。 $\alpha^7 = 1$ より $\alpha^{k+l} = 1$ であるから $\alpha^k = \alpha^{-l}$ である。さらに $\alpha^{-1} = \beta$ なので $\alpha^k = \beta^l$ である。

(3) $\beta = \alpha^{-1}, \alpha^7 = 1$ より $\beta = \alpha^6, \beta^2 = \alpha^5, \beta^4 = \alpha^3$ である。したがって $B = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3$ である。 $\alpha \neq 1$ で $\alpha^7 = 1$ だから $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^6 = 0$ である。よって $A+B = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = -1$ であり、 $A+B = -1$ である。

次に AB を計算する。積の各項の指数を 7 で割った余りで見ると、 $\{1, 2, 4\} + \{6, 5, 3\}$ から、指数 0 になる項が 3 個あり、指数 1 から 6 までの項がそれぞれ 1 個ずつ現れる。したがって $AB = 3 + (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^6) = 3 - 1 = 2$ である。よって $AB = 2$ である。

(4) B は A の共役複素数である。したがって $A = u + iv$ とおくと $A+B = 2u, AB = u^2 + v^2$ である。(3) より $2u = -1$ なので $u = -\frac{1}{2}$ である。また $u^2 + v^2 = 2$ だから $\frac{1}{4} + v^2 = 2$ であり、 $v^2 = \frac{7}{4}$ である。

ここで v は $v = \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta$ である。 $\theta = 2\pi/7$ では $\sin \theta > 0$, $\sin 2\theta > 0$, $\sin 4\theta = -\sin(\pi/7)$ であり、 $\sin 2\theta > \sin(\pi/7)$ だから和は正である。よって $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$ である。

【総評】 難度 6、目安時間 28 分。7 乗根の性質を三角関数の和に結びつける問題である。(3) では B を $\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3$ と書き換えると、 $A + B$ と AB の計算が一気に見通せる。(4) は A の虚部が求める和であること、符号が正であることを最後に確認するのが重要である。

【第 6 問】

$AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ である直角三角形 ABC を考える。 n を 2 以上の自然数とし、辺 AB を n 等分して得られる点を A に近い方から順に $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ とする。 A を P_0 , B を P_n とおくと、以下の問いに答えよ。

- (1) 三角形 P_kCP_{k+1} ($0 \leq k \leq n-1$) の内接円の半径を求めよ。
- (2) 三角形 P_kCP_{k+1} ($0 \leq k \leq n-1$) の内接円の面積の総和を S_n とする。

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

とおくと、 $nS_n \leq \frac{3\pi}{4} I_n$ となることを示せ。また、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を求めよ。

- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$ を求めよ。

【方針】

座標を $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, \sqrt{3})$ とおき、 $P_k = (k/n, 0)$ とする。(1) は小三角形 P_kCP_{k+1} の底辺、2 つの斜辺、面積を求め、内接円半径 $r = \Delta/s$ で表す。(2) は 2 つの斜辺を下から同じ量で評価して r_k^2 の上界を作り、 I_n に結びつける。 I_n はリーマン和として積分に収束する。(3) は (1) の正確な式を用いて nS_n をリーマン和に直し、極限を計算する。

【解答】

(1) 座標を $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, \sqrt{3})$ とおく。このとき $P_k = \left(\frac{k}{n}, 0\right)$ である。したがって $P_kP_{k+1} = \frac{1}{n}$ であり、

$$CP_k = \sqrt{3 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}, \quad CP_{k+1} = \sqrt{3 + \left(\frac{k+1}{n}\right)^2}$$

である。

三角形 P_kCP_{k+1} の底辺を P_kP_{k+1} と見ると、高さは $\sqrt{3}$ なので、面積は $\Delta_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2n}$ である。内接円の半径を r_k とすると、 $\Delta_k = r_k s_k$ である。ただし s_k は半周長で、

$$s_k = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n} + \sqrt{3 + (k/n)^2} + \sqrt{3 + ((k+1)/n)^2} \right\}$$

である。よって

$$r_k = \frac{\sqrt{3}/n}{\frac{1}{n} + \sqrt{3 + (k/n)^2} + \sqrt{3 + ((k+1)/n)^2}}$$

である。

(2)

$$\sqrt{3 + \left(\frac{k+1}{n}\right)^2} \geq \sqrt{3 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

だから、(1) の分母は

$$2\sqrt{3 + (k/n)^2}$$

以上である。したがって

$$r_k \leq \frac{\sqrt{3}}{2n\sqrt{3 + (k/n)^2}}.$$

よって

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \pi r_k^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{3\pi}{4n^2 \{3 + (k/n)^2\}}.$$

両辺に n を掛けると

$$nS_n \leq \frac{3\pi}{4} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3 + (k/n)^2} = \frac{3\pi}{4} I_n.$$

I_n は関数 $1/(3+x^2)$ の $[0, 1]$ における区区分求積和なので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}.$$

ここで $x = \sqrt{3} \tan \theta$ と置くと、

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \quad dx = \sqrt{3} \sec^2 \theta d\theta$$

である。したがって

$$\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} d\theta = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

(3)

$$g(x) = \sqrt{3+x^2}$$

とおく。(1) の正確な式から

$$nS_n = \frac{3\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\{n^{-1} + g(k/n) + g((k+1)/n)\}^2}. \quad (1)$$

g は増加関数だから

$$2g(k/n) \leq n^{-1} + g(k/n) + g((k+1)/n) \leq n^{-1} + 2g((k+1)/n).$$

左側の評価から、(2) で得た

$$nS_n \leq \frac{3\pi}{4} I_n$$

が成り立つ。一方、右側の評価を (1) に用いると

$$nS_n \geq \frac{3\pi}{4} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\{g((k+1)/n) + 1/(2n)\}^2}.$$

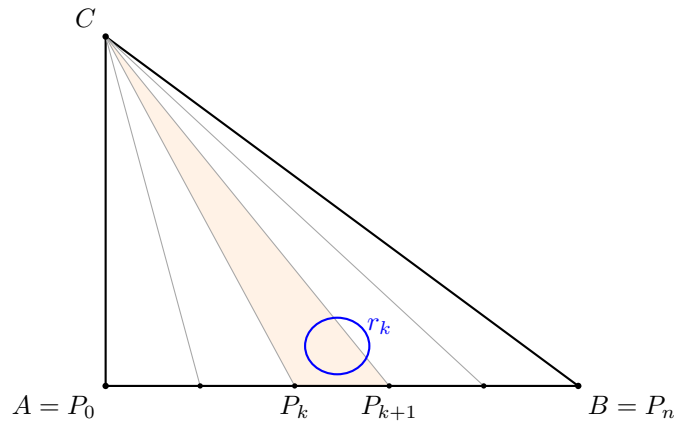
右辺の和は、連続関数 $1/(3+x^2)$ の区区分求積和と同じ極限をもつので、その極限は

$$\frac{3\pi}{4} \int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$$

である。上からの評価も同じ極限へ収束するから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi^2}{8\sqrt{3}}.$$

辺 AB の各小区間と頂点 C が作る細長い三角形ごとに内接円を考える。



【総評】 難度 8、目安時間 34 分。小三角形の内接円半径を、面積と半周長から正確に出す。(2) は半径の上界を作って区分求積和へ結びつける。積分は $x = \sqrt{3} \tan \theta$ と置けば逆三角関数を使わず高校数学内で計算できる。(3) では同じ分母を上下から評価し、2 つの区分求積和が同じ極限へ収束することを明示して、近似だけに頼らないはさみうちに仕上げる。