

東北大学 2012 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x = s + t + 1, y = s - t - 1$ とおく。 s, t が $s \geq 0, t \geq 0$ の範囲を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。
- (2) $x = st + s - t + 1, y = s + t - 1$ とおく。 s, t が実数全体を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

【方針】

(1) は連立一次式を s, t について解き、 $s \geq 0, t \geq 0$ を (x, y) の半平面条件に直す。(2) は $y = s + t - 1$ から $t = y + 1 - s$ を消去し、固定した y に対して x が s の二次式としてどこまで動けるかを見る。下向き放物線の最大値以下がすべて実現するので、境界放物線の左側の領域になる。

【解答】

(1) $x = s + t + 1, y = s - t - 1$ である。2 式を加えると $x + y = 2s$ であり、2 式を引くと $x - y - 2 = 2t$ である。したがって $s = \frac{x + y}{2}, t = \frac{x - y - 2}{2}$ である。

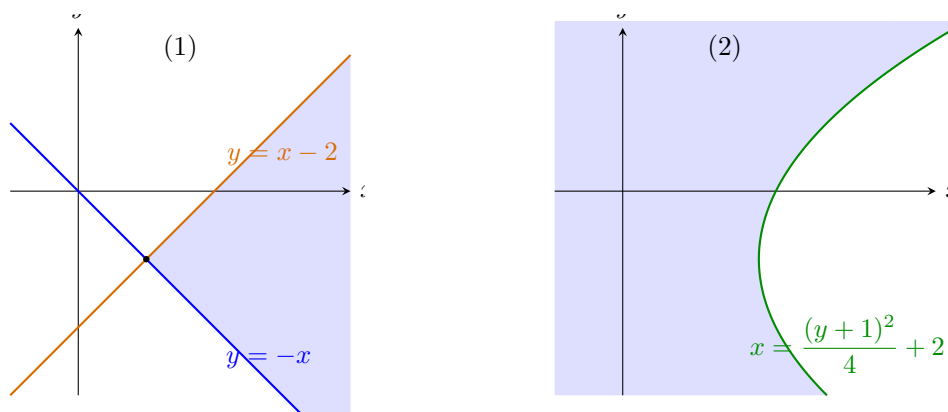
条件 $s \geq 0, t \geq 0$ は $x + y \geq 0, x - y - 2 \geq 0$ と同値である。よって点 (x, y) の動く範囲は $x + y \geq 0, x - y \geq 2$ を同時に満たす領域である。図示すると、直線 $y = -x$ の上側と直線 $y = x - 2$ の下側の共通部分であり、境界線を含む。

(2) $y = s + t - 1$ より $t = y + 1 - s$ である。これを $x = st + s - t + 1$ に代入すると $x = s(y + 1 - s) + s - (y + 1 - s) + 1 = -s^2 + (y + 3)s - y$ である。

ここで s は任意の実数を動く。固定した y に対して、右辺は s の下に凸でない二次式であり、最大値は頂点 $s = \frac{y + 3}{2}$ である。その最大値は $\frac{(y + 3)^2}{4} - y = \frac{y^2 + 2y + 9}{4}$ である。逆に、この最大値以下の任意の x は、対応する二次方程式が実数解 s をもつので実現できる。

したがって点 (x, y) の動く範囲は $x \leq \frac{y^2 + 2y + 9}{4}$ である。図示すると、境界 $x = \frac{(y + 1)^2 + 8}{4}$ をもつ右向きの放物線と、その左側の領域であり、境界を含む。

消去後の 2 つの領域を図示すると次のようになる。青色部分は境界を含む。



【総評】 難度 5、目安時間 25 分。どちらも文字消去で領域を出す問題である。(1) は s, t を解いて半平面条件に戻せばよい。(2) は y を固定して x の最大値を考えるのが自然で、二次式の最大値以下がすべて実現することを確認すると、図示すべき側を誤りにくい。

【第 2 問】

m を実数とする。座標平面上で直線 $y = x$ に関する対称移動を表す 1 次変換を f とし、直線 $y = mx$ に関する対称移動を表す 1 次変換を g とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 1 次変換 g を表す行列 A を求めよ。
- (2) 合成変換 $g \circ f$ を表す行列 B を求めよ。
- (3) $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる m をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は直線 $y = mx$ 方向の成分を保ち、それに垂直な成分の符号を反転する対称移動の行列を作る。(2) は $y = x$ に関する対称移動の行列を右から掛けて合成行列を得る。(3) は得られた行列が回転行列の形になっていることを読み取り、3 乗して単位行列になる回転角 $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ に対応する m を解く。

【解答】

(1) 直線 $y = mx$ 方向のベクトルを $\vec{u} = (1, m)$ とする。この直線に関する対称移動では、 $\vec{u}$ 方向の成分はそのまま残り、垂直方向の成分は符号が反転する。計算すると、点 (x, y) の像 (X, Y) は

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。したがって

$$A = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

である。

(2) 直線 $y = x$ に関する対称移動 f は、座標を入れ替える変換なので、行列は

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。合成 $g \circ f$ は先に f 、次に g を行うので、行列は $B = AF$ である。よって

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 2m & 1-m^2 \\ m^2-1 & 2m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

(3) (2) の行列は

$$B = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

の形であり、 $\cos \phi = \frac{2m}{1+m^2}$, $\sin \phi = \frac{m^2-1}{1+m^2}$ と読める。したがって B は原点まわりの回転を表す。 $B^3 = E$ となるには、3 回回転した角が 2π の整数倍であればよい。したがって $\phi \equiv 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$ である。 $\phi \equiv 0$ のときは $\sin \phi = 0, \cos \phi = 1$ なので $\frac{m^2-1}{1+m^2} = 0$ かつ $2m/(1+m^2) = 1$ となり、 $m = 1$ である。

残り 2 つの場合は $\cos \phi = -1/2$ であるから $\frac{2m}{1+m^2} = -\frac{1}{2}$ を解けばよい。すなわち $m^2 + 4m + 1 = 0$ であり、 $m = -2 \pm \sqrt{3}$ を得る。よって $m = 1, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}$ である。

▶ 解法 2 (2 直線の角による回転)

【方針】

直線 $y = mx$ の方向角を θ とする。反射行列を方向ベクトルから作り、 $g \circ f$ は 2 本の軸のなす角の 2 倍だけ回転する変換であることを使う。3 回の合成が恒等変換になる方向角を先に求め、最後に $m = \tan \theta$ へ戻す。

【解答】

(1) $\tan \theta = m$ とし、直線 $y = mx$ の単位方向ベクトルを

$$\mathbf{e} = (\cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}(1, m)$$

とする。任意のベクトル $\mathbf{v}$ をこの直線に関して反射すると

$$\mathbf{v} \mapsto 2(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v})\mathbf{e} - \mathbf{v}$$

である。したがって

$$A = 2\mathbf{e}^t \mathbf{e} - E = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}.$$

(2) 直線 $y = x$ に関する反射行列は

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

だから、

$$B = AF = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 2m & 1-m^2 \\ m^2-1 & 2m \end{pmatrix}.$$

(3) 直線 $y = x$ の方向角は $\pi/4$ である。2 直線に関する反射を続けて行くと、その合成は原点を中心とする角

$$2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

の回転になる。よって $B^3 = E$ であるための必要十分条件は

$$6\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

である。直線の方向角を π を法として考えると

$$\theta \equiv \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \pmod{\pi}.$$

したがって

$$m = \tan \theta = 1, \quad -2 - \sqrt{3}, \quad -2 + \sqrt{3}.$$

【総評】 難度 6、目安時間 28 分。対称移動の行列を作り、合成が回転になることを見抜く問題である。行列の掛ける順序は $g \circ f$ なので AF である点に注意したい。(3) は行列を直接 3 乗するより、回転角を読むと見通しがよい。幾何的な別解も自然で、2 直線の対称移動の合成が回転になる事実を使うと、答えの候補を短く導ける。行列の成分計算と、反射軸の角から合成回転を読む方法を独立答案として分け、どちらでも 3 つの傾きを漏れなく確認できる形にした。

【第 3 問】

袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

- (1) $N = 4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする。 $X = 1, X = 2, X = 3, X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また, X の期待値を求めよ。
- (2) $N = 3$ とし, n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, それらのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。 p_n と q_n を求めよ。

【方針】

(1) は袋 A の取り出し順を固定し, 袋 B の取り出し順を 4 文字の順列として見る。数字が一致した回数は順列の固定点数なので, 固定点がちょうど 1 個, 2 個, 3 個, 4 個の場合を, 残りの完全不一致の並べ方まで含めて数える。期待値は各回の一致を表す指示変数の和として求める。(2) は, 残り 3 枚のときの一致確率が $1/3$, 残り 2 枚のときの一致確率が $1/2$, 残り 1 枚では必ず一致することを使い, 待ち時間の和として p_n, q_n を表す。

【解答】

(1) 袋 A の取り出し順を固定してよい。このとき袋 B の取り出し順は 1, 2, 3, 4 の順列であり, 同じ回と同じ数字が出る回数 X は, その順列の固定点の個数である。全体は $4! = 24$ 通りである。

固定点がちょうど 1 個の順列を数える。固定する位置は ${}_4C_1$ 通りで, 残り 3 個は固定点をもたないように並べる。3 個の完全不一致の並べ方は (231), (312) の 2 通りであるから, ${}_4C_1 \cdot 2 = 8$ 通りである。

固定点がちょうど 2 個の順列では, 固定する 2 位置を選ぶと, 残り 2 個は互いに入れ替わるしかない。したがって ${}_4C_2 = 6$ 通りである。固定点がちょうど 3 個なら残り 1 個も固定されてしまうので, これは 0 通りである。固定点が 4 個は恒等順列の 1 通りである。

よって

$$P(X = 1) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}, \quad P(X = 2) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4},$$

$$P(X = 3) = 0, \quad P(X = 4) = \frac{1}{24} \text{ である。}$$

期待値は指示変数で求めると速い。 i 回目に数字が一致すれば 1、一致しなければ 0 となる変数を Y_i とすると $X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$ である。各回で袋 B の該当カードがその位置に来る確率は $1/4$ だから $E(Y_i) = \frac{1}{4}$ である。したがって $E(X) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ である。

(2) 最初は 3 枚ずつ残っている。1 回の操作で一致する確率は $1/3$ 、一致しない確率は $2/3$ である。カードが初めて取り除かれるのが n 回目であるには, 最初の $n - 1$ 回が不一致で, n 回目が一一致すればよい。よって $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}$ である。

次に q_n を求める。すべてのカードが取り除かれるには, まず残り 3 枚の状態ですべて一致するまで待ち, 次に残り 2 枚の状態ですべて一致するまで待ち, 最後に残り 1 枚の状態ですべて一致する。最後の 1 枚は必ず一致する。

残り 3 枚ですべて一致するまでの回数を i とすると, その確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{3}$ である。残り 2 枚ですべて一致するまでの回数を j とすると, その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \frac{1}{2}$ である。全体で n 回目にすべて取り除かれるには $i + j + 1 = n$ である。したがって $n \geq 3$ のとき

$$q_n = \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-i} \frac{1}{2}$$

である。 $j = i - 1$ と置き直すと

$$q_n = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{n-3} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3-j}$$

であり, 等比数列の和から $q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ となる。よって

$$q_n = 0 \quad (n = 1, 2), \quad q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \quad (n \geq 3)$$

【総評】 難度 7、目安時間 31 分。(1) は順列の固定点を数える問題で、固定点が 3 個だけという場合が存在しない理由を明記するとよい。期待値は分布から計算してもよいが、各回の一致確率を足す方が短く確実である。(2) は「残り枚数が変わるたびに一致確率が変わる」点が核心で、残り 3 枚・2 枚・1 枚の待ち時間を分けて書くと、 q_n の和の範囲と $n = 1, 2$ の例外を落としにくい。

【第 4 問】

$0 \leq x \leq \pi$ に対して、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos |t-x|}{1 + \sin |t-x|} dt$$

と定める。 $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

【方針】

絶対値の中身 $|t-x|$ の符号が変わるかどうかで、 $0 \leq x \leq \pi/2$ と $\pi/2 \leq x \leq \pi$ に分ける。原始関数は $\log(1 + \sin u)$ である。前半では積分区間を $t = x$ で分割して $\log\{(1 + \sin x)(1 + \cos x)\}$ を得る。後半では全区間で $t \leq x$ なので一度に積分し、最後は得られた関数の増減と端点値を比較する。

【解答】

$u \geq 0$ に対して

$$\int \frac{\cos u}{1 + \sin u} du = \log(1 + \sin u)$$

であることを用いる。

まず $0 \leq x \leq \pi/2$ とする。このとき積分区間を $t = x$ で分けると

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos(x-t)}{1 + \sin(x-t)} dt + \int_x^{\pi/2} \frac{\cos(t-x)}{1 + \sin(t-x)} dt$$

である。変数をそれぞれ $u = x - t$ 、 $u = t - x$ とすれば

$$f(x) = \int_0^x \frac{\cos u}{1 + \sin u} du + \int_0^{\pi/2-x} \frac{\cos u}{1 + \sin u} du$$

である。したがって $f(x) = \log(1 + \sin x) + \log(1 + \cos x)$ すなわち $f(x) = \log\{(1 + \sin x)(1 + \cos x)\}$ である。この範囲で $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x$ は $x = \pi/4$ で最大となる。実際、 $\sin x + \cos x$ と $\sin x \cos x$ はともに $x = \pi/4$ で最大である。よってこの範囲の最大値は

$$\log \left\{ \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right\} = \log \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right)$$

である。端点 $x = 0, \pi/2$ では値は $\log 2$ である。

次に $\pi/2 \leq x \leq \pi$ とする。このとき $0 \leq t \leq \pi/2 \leq x$ なので $|t-x| = x-t$ である。したがって

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x-t)}{1 + \sin(x-t)} dt = \int_{x-\pi/2}^x \frac{\cos u}{1 + \sin u} du$$

である。よって $f(x) = \log(1 + \sin x) - \log(1 + \sin(x - \pi/2))$ であり、 $\sin(x - \pi/2) = -\cos x$ だから $f(x) = \log \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$ である。

この範囲では $\frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$ は $x = \pi/2$ で 2、 $x = \pi$ で $1/2$ となり、単調に減少する。したがってこの範囲の最大値は $\log 2$ 、最小値は $-\log 2$ である。

以上を合わせると、全体の最大値は $\log \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right)$ であり、最小値は $-\log 2$ である。

【総評】 難度 7、目安時間 31 分。絶対値付きの積分を、 x が積分区間の中にあるか外にあるかで分ける問題である。原始関数 $\log(1 + \sin u)$ に気づけば計算は短くなるが、 $0 \leq x \leq \pi/2$ では積分区間を 2 つに分ける必要がある。最大最小では前半の内部最大 $x = \pi/4$ と、後半の端点 $x = \pi$ を比較することが重要である。

【第 5 問】

長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし、点 P は点 A, B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle BPQ = \frac{\pi}{3}$ となるようにとり、線分 BP の長さを x とし、線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

- (1) y を x を用いて表せ。
- (2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき、 y が最大となる x を求めよ。

【方針】

直径に対する円周角より $\angle APB = \pi/2$ である。 $BP = x$ とおくと $AP = \sqrt{1-x^2}$ で、三角形 BPQ に正弦定理を使えば y を求められる。(2) は $\angle PBQ$ の正接を r とおき、 $x = 1/\sqrt{1+r^2}$ に変換して y を r の関数として微分する。端では $y \rightarrow 0$ なので、内部の停留点が最大を与える。

【解答】

(1) AB は円 C の直径であり、 P は A, B と異なる円周上の点であるから $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ である。 $AB = 1$ 、 $BP = x$ より、直角三角形 ABP で $AP = \sqrt{1-x^2}$ である。 $\angle PBQ = \angle PBA$ とおく。この角を φ とすれば、直角三角形 ABP から $\cos \varphi = x$ 、 $\sin \varphi = \sqrt{1-x^2}$ である。三角形 BPQ では $\angle BPQ = \pi/3$ であり、 $PQ = y$ 、 $BP = x$ である。正弦定理より $\frac{y}{\sin \varphi} = \frac{x}{\sin(\varphi + \pi/3)}$ である。ここで

$$\sin(\varphi + \pi/3) = \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi = \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}x}{2}$$

だから $y = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}x + \sqrt{1-x^2}}$ である。

(2) $r = \tan \varphi$ ($r > 0$) とおく。すると

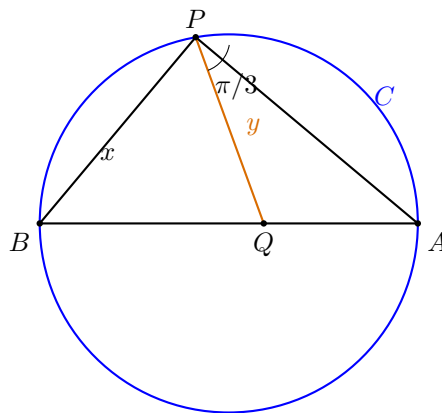
$$x = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}, \quad \sqrt{1-x^2} = \sin \varphi = \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$$

である。(1) の式は $y = \frac{2r}{(r + \sqrt{3})\sqrt{1+r^2}}$ となる。 $r \rightarrow 0+$ または $r \rightarrow \infty$ で $y \rightarrow 0$ であるから、最大は内部で起こる。

対数微分を用いると $\frac{d}{dr} \log y = \frac{1}{r} - \frac{1}{r + \sqrt{3}} - \frac{r}{1+r^2}$ である。これを 0 とおくと $\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \sqrt{3}} - \frac{r}{1+r^2} = 0$ であり、整理して $r^3 = \sqrt{3}$ を得る。したがって $r = 3^{1/6}$ である。この前後で y は増加から減少に変わるので、ここで最大をとる。

よって求める x は $x = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+3^{1/3}}}$ である。

円周角と三角形 BPQ の角の対応は次の図で確認できる。



【総評】 難度 6、目安時間 28 分。円周角で $\triangle ABP$ が直角三角形になることを最初に使う。 Q が線分 AB 上にあるため、 $\angle PBQ$ を $\triangle ABP$ の角として読めるのがポイントである。(2) はそのまま x で微分すると式が重いので、 $r = \tan \angle PBQ$ によって対数微分へ持ち込むと計算が整理される。

【第 6 問】

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき, $a_n > 1$ となることを示せ。
- (2) $\alpha^2 = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。
- (3) すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを示せ。
- (4) $0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して, 不等式

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq r \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。さらに, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

【方針】

漸化式を $a_{n+1} = \phi(a_n)$ と見て, まず 1 より大きい範囲に入ることを帰納法で示す。次に正の固定点 α を求め, ϕ が増加関数であることから $a_n < \alpha$ を保つ。(4) は平均値の定理を $\phi(\alpha) - \phi(a_n)$ に適用し, $[1, \alpha]$ 上で $\phi'(x)$ が 1 未満に抑えられることを使って差が等比的に縮むことを示す。

【解答】

(1) まず $a_2 = \sqrt{\frac{3 \cdot 1 + 4}{2 \cdot 1 + 3}} = \sqrt{\frac{7}{5}} > 1$ である。次に $a_n > 1$ と仮定する。このとき $\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} > 1$ は $3a_n + 4 > 2a_n + 3$ すなわち $a_n + 1 > 0$ から成り立つ。したがって $a_{n+1} > 1$ である。よって帰納法により $n \geq 2$ のとき $a_n > 1$ である。

(2) 正の実数 α が $\alpha^2 = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ を満たすとする。分母は正なので整理して $\alpha^2(2\alpha + 3) = 3\alpha + 4$ すなわち $2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$ である。因数分解すると $(\alpha + 1)(2\alpha^2 + \alpha - 4) = 0$ である。正の解は二次方程式 $2\alpha^2 + \alpha - 4 = 0$ から $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$ である。

(3) $\phi(x) = \sqrt{\frac{3x + 4}{2x + 3}}$ とおく。 $x > 0$ では $\frac{3x + 4}{2x + 3}$ の微分が $\frac{1}{(2x + 3)^2} > 0$ であるから, $\phi(x)$ は増加関数である。

(2) の α は $\alpha > 1$ を満たす。また $a_1 = 1 < \alpha$ である。もし $a_n < \alpha$ なら, 増加性より $a_{n+1} = \phi(a_n) < \phi(\alpha) = \alpha$ である。したがって帰納法により $a_n < \alpha$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である。

(4) (1), (3) より, すべての n について $1 \leq a_n < \alpha$ である。 $1 \leq x \leq \alpha$ で $\phi'(x) = \frac{1}{2\phi(x)(2x + 3)^2}$ である。この区間では $\phi(x) \geq 1$, $2x + 3 \geq 5$ だから $0 < \phi'(x) \leq \frac{1}{50}$ である。

平均値の定理より, a_n と α の間のある数 ξ を用いて $\alpha - a_{n+1} = \phi(\alpha) - \phi(a_n) = \phi'(\xi)(\alpha - a_n)$ と書ける。したがって $0 < \frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq \frac{1}{50}$ である。よって, 例えば $r = \frac{1}{50}$ とすれば条件を満たす。

さらに $0 < \alpha - a_n \leq r^{n-1}(\alpha - a_1)$ であり, $0 < r < 1$ だから右辺は 0 に収束する。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$ である。

【総評】 難度 7、目安時間 32 分。漸化式を関数反復として見て, 固定点への収束を示す問題である。 $1 < a_n < \alpha$ に閉じ込めるだけでは極限の存在はまだ不足で, (4) の平均値の定理による縮小評価が収束の決め手になる。導関数の評価は粗くてよいので, $1 \leq x \leq \alpha$ で 1 未満の上界を明示することが重要である。