

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2013 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

2 次方程式 $4x^2 + 2x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β ($\alpha > \beta$) とする。

(1) $\alpha = \cos \theta$ となる角 θ が, $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲に 1 つだけ存在することを示せ。

以下, θ は (1) で定まるものとする。

(2) $\beta = \cos 2\theta$ であることを示せ。

(3) θ の値を求めよ。

(4) $\sin \frac{3\theta}{4}$ を求めよ。

第 2 問

t は $0 < t < 1$ を満たす実数とする。1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において、辺 OA を $t : (1 - t)$ に内分する点を D 、辺 OB を $2 : 1$ に内分する点を E 、辺 AC を $2 : 1$ に内分する点を F とする。3 点 D, E, F が定める平面を α とし、平面 α と辺 BC との交点を G とする。

- (1) $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, および t を用いて表せ。
- (2) $0 < t < 1$ における $\triangle EFG$ の面積の最小値を求めよ。

第 3 問

2つの双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$, $D: x^2 - y^2 = -1$, および直線 $l: y = ax + b$ を考える。ただし, a, b は実数とする。

- (1) C と l がちょうど 2 点で交わるような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。
- (2) C と l がちょうど 1 点で交わるような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。
- (3) C と l の交点の個数と D と l の交点の個数との和が, ちょうど 2 となるような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

第 4 問

袋の中に 1, 2, 3, 4, 5 の番号が 1 つずつ書かれた 5 つの玉が入っている。この中から無作為に 1 個の玉を取り出し, 玉に書かれている数字を記録したのち袋に戻すという操作を行う。その操作を繰り返し, 記録された数字の和が 3 の倍数になった時点で終了する。ただし, 1 回目で 3 の倍数が出た場合は, その時点で終了とする。 n 回目の操作で終了する確率を p_n とする。

- (1) p_1, p_2 を求めよ。
- (2) $n \geq 3$ のとき, p_n を n の式で表せ。

第 5 問

p は $0 < p < 1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 1$ および関係式

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + p \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。

(1) $n \geq 2$ のとき、 a_n を求めよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} na_n = 20$ であるとき、 p の値を求めよ。

第 6 問

座標平面において、点 $(1, 1)$ を中心とする半径 1 の円の内部を D とする。 r を正の実数とし、3 点 $(0, 0)$, $(r, 0)$, $(0, r)$ を頂点とする三角形を T とする。 T と D の共通部分を T から取り除いて得られる図形の面積を $S(r)$ とする。 $S(r) - 2r$ の最小値とそれを与える r の値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)