

東北大学 2013 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

2 次方程式 $4x^2 + 2x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β ($\alpha > \beta$) とする。

(1) $\alpha = \cos \theta$ となる角 θ が, $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲に 1 つだけ存在することを示せ。

以下, θ は (1) で定まるものとする。

(2) $\beta = \cos 2\theta$ であることを示せ。

(3) θ の値を求めよ。

(4) $\sin \frac{3\theta}{4}$ を求めよ。

【方針】

(1) から (3) は文系後期第 2 問と同じ流れで、2 次方程式の解を求め、 $\cos \theta$ の単調性と 2 倍角公式で θ を決める。(4) は $\theta = 2\pi/5$ を代入し、 $\sin(3\pi/10) = \cos(\pi/5)$ に直して既知の値を使う。

【解答】

(1) 2 次方程式 $4x^2 + 2x - 1 = 0$ の解は $x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ である。 $\alpha > \beta$ より $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$, $\beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ である。 $2 < \sqrt{5} < 3$ だから $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ である。また $\pi/3 \leq \theta \leq \pi/2$ で $\cos \theta$ は $1/2$ から 0 まで単調に減少する。したがって $\alpha = \cos \theta$ となる θ はこの範囲にただ 1 つ存在する。

(2) α は方程式 $4x^2 + 2x - 1 = 0$ の解なので $4\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$ である。これより $2\alpha^2 - 1 = -\alpha - \frac{1}{2}$ であり、 $\alpha = (-1 + \sqrt{5})/4$ を代入すると $2\alpha^2 - 1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} = \beta$ である。したがって $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2\alpha^2 - 1 = \beta$ である。

(3)

$$\phi = \frac{2\pi}{5}$$

とおく。和積の公式を繰り返すと得られる恒等式

$$1 + 2\cos \phi + 2\cos 2\phi = \frac{\sin(5\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

に $\phi = 2\pi/5$ を代入すると、右辺は 0 になる。 $c = \cos \phi$ とおき、 $\cos 2\phi = 2c^2 - 1$ を使えば

$$4c^2 + 2c - 1 = 0$$

を得る。さらに $\pi/3 < \phi < \pi/2$ なので $0 < c < 1/2$ であり、 c は大きい方の解 α である。

(1) で、この範囲に $\cos \theta = \alpha$ となる角はただ 1 つであることを示した。したがって

$$\theta = \frac{2\pi}{5}$$

である。

(4) (3) より

$$\sin \frac{3\theta}{4} = \sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5}.$$

$\cos(\pi/5) > 0$ であり、半角の関係と $\alpha = \cos(2\pi/5)$ から

$$\cos^2 \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \cos(2\pi/5)}{2} = \frac{1 + \alpha}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}.$$

一方、

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{8}$$

である。正の平方根を選んで

$$\sin \frac{3\theta}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

を得る。

【総評】 難度 5、目安時間 16 分。前半は解の公式と 2 倍角公式の標準問題で、 2θ の範囲を明示して角を一意に決めることが採点上重要である。(4) は $3\theta/4 = 3\pi/10$ まで出れば、余角で $\cos \pi/5$ に直せる。典型ミスは、 $\theta = 2\pi/5$ を得た後に $3\theta/4$ の計算を $3\pi/5$ などと取り違えることである。

【第 2 問】

t は $0 < t < 1$ を満たす実数とする。1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ において、辺 OA を $t : (1-t)$ に内分する点を D 、辺 OB を $2 : 1$ に内分する点を E 、辺 AC を $2 : 1$ に内分する点を F とする。3 点 D, E, F が定める平面を α とし、平面 α と辺 BC との交点を G とする。

(1) $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, および t を用いて表せ。

(2) $0 < t < 1$ における $\triangle EFG$ の面積の最小値を求めよ。

【方針】

文系後期第 4 問を t で一般化して考える。 G を辺 BC 上の $(1-u)\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OC}$ と置き、 D, E, F, G の同一平面条件を係数比較して $u = t$ を求める。面積は $\overrightarrow{EF}$ と $\overrightarrow{EG}$ の内積で 2 乗を計算し、 t の二次式の最小値に帰着する。

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

とおく。正四面体なので

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

である。

各点の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OD} = t\vec{a}, \quad \overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

である。 G は辺 BC 上にあるので $\overrightarrow{OG} = (1-u)\vec{b} + u\vec{c}$ とおく。 D, E, F, G が同一平面上にあるので $\overrightarrow{DG} = \lambda\overrightarrow{DE} + \mu\overrightarrow{DF}$ と表せる。ここで

$$\overrightarrow{DG} = -t\vec{a} + (1-u)\vec{b} + u\vec{c},$$

$$\overrightarrow{DE} = -t\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{DF} = \left(\frac{1}{3} - t\right)\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

である。係数を比較して

$$1 - u = \frac{2}{3}\lambda, \quad u = \frac{2}{3}\mu, \quad -t = -t\lambda + \left(\frac{1}{3} - t\right)\mu$$

を得る。最初の 2 式から $\lambda = \frac{3}{2}(1-u)$, $\mu = \frac{3}{2}u$ であり、これを 3 式目へ代入すると $-2t = -3t(1-u) + (1-3t)u = -3t + u$ となる。したがって $u = t$ である。よって $\overrightarrow{OG} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ である。

(2) (1) より

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

であり、

$$\overrightarrow{EG} = \left(\frac{1}{3} - t\right)\vec{b} + t\vec{c}$$

である。内積関係を用いると $|\overrightarrow{EF}|^2 = \frac{5}{9}$, また

$$|\overrightarrow{EG}|^2 = \left(\frac{1}{3} - t\right)^2 + t^2 + \left(\frac{1}{3} - t\right)t = t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{9}$$

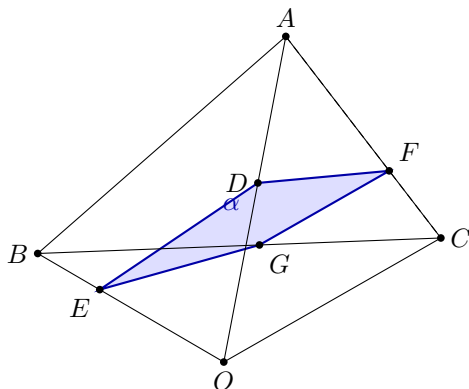
である。さらに $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \frac{12t-1}{18}$ である。

したがって

$$[\triangle EFG]^2 = \frac{1}{4} \left(|\vec{EF}|^2 |\vec{EG}|^2 - (\vec{EF} \cdot \vec{EG})^2 \right)$$

より $[\triangle EFG]^2 = \frac{36t^2 - 36t + 19}{1296}$ である。平方根をとる前に、この二次式を最小にすればよい。平方完成すると

$36t^2 - 36t + 19 = 36 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 10$ である。 $0 < t < 1$ で $t = 1/2$ は許されるので、面積の最小値は $\sqrt{\frac{10}{1296}} = \frac{\sqrt{10}}{36}$ である。



図は t のある値での模式図である。 D が OA 上を動くのに連動して、 G は同じ内分比で BC 上を動く。

【総評】 難度 7、目安時間 30 分。平面と辺の交点を係数比較で求める前半と、内積で面積の 2 乗を計算する後半の両方で計算力が問われる。採点上は、 G の係数が $u = t$ になるまでの導出を省略しないこと、面積を直接ではなく 2 乗で最小化することが重要である。典型ミスは、 F が辺 AC を $2:1$ に内分するため $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$ になる点を逆にすることである。

【第 3 問】

2 つの双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$, $D: x^2 - y^2 = -1$, および直線 $l: y = ax + b$ を考える。ただし、 a, b は実数とする。

- (1) C と l がちょうど 2 点で交わるような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。
- (2) C と l がちょうど 1 点で交わるような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。
- (3) C と l の交点の個数と D と l の交点の個数との和が、ちょうど 2 となるような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

【方針】

直線を 2 つの双曲線へ代入し、 x の 2 次方程式の判別式を求める。ただし $|a| = 1$ では 2 次の項が消えるため、判別式の表へ機械的に入れず、一次方程式として別に数える。最後に C, D の交点数を表で組み合わせ、境界を含むか除くかまで区別して 3 枚の (a, b) 平面へ描く。

【解答】

準備直線 $l: y = ax + b$ を C, D に代入すると、それぞれ

$$C: (1 - a^2)x^2 - 2abx - (b^2 + 1) = 0,$$

$$D: (1 - a^2)x^2 - 2abx + (1 - b^2) = 0$$

となる。 $a^2 \neq 1$ のときの判別式は

$$\Delta_C = 4(b^2 + 1 - a^2), \quad \Delta_D = 4(a^2 + b^2 - 1)$$

である。

- (1) $|a| < 1$ なら $\Delta_C > 0$ なので、 C と l は常に 2 点で交わる。 $|a| > 1$ では

$$\Delta_C > 0 \iff b^2 > a^2 - 1.$$

$|a| = 1$ では 2 次の項が消える。 $b \neq 0$ なら一次方程式となって交点は 1 個、 $b = 0$ なら解はないため、2 点で交わることはない。よって求める範囲は

$$|a| < 1 \quad \text{または} \quad |a| > 1, b^2 > a^2 - 1.$$

(2) $|a| > 1$ では接する条件 $\Delta_C = 0$ から

$$b^2 = a^2 - 1$$

を得る。また $|a| = 1, b \neq 0$ では、先ほど見たように一次方程式となるため交点はちょうど 1 個である。したがって

$$|a| > 1, b^2 = a^2 - 1 \quad \text{または} \quad |a| = 1, b \neq 0.$$

双曲線 $b^2 = a^2 - 1$ の頂点 $(\pm 1, 0)$ は、どちらの条件にも含まれないことに注意する。

(3) 交点数を N_C, N_D とする。境界を除く各領域では、必要な組合せは次の 2 つだけである。

条件	N_C	N_D	$N_C + N_D$
$a^2 + b^2 < 1$	2	0	2
$ a > 1, b^2 < a^2 - 1$	0	2	2

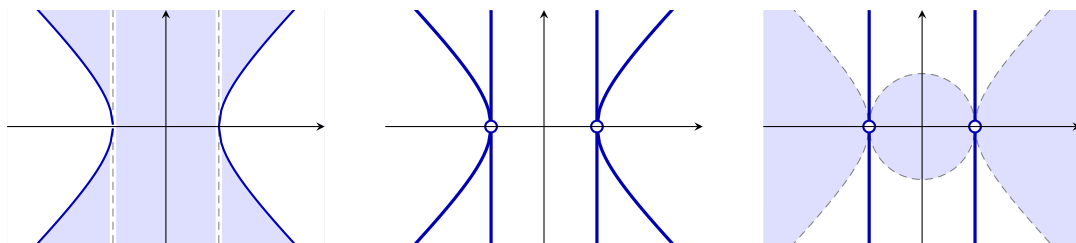
さらに $|a| = 1, b \neq 0$ では、 C, D の方程式はいずれも一次方程式となり

$$N_C = N_D = 1$$

である。一方、 $(a, b) = (\pm 1, 0)$ では両方とも交点をもたない。よって求める範囲は

$$a^2 + b^2 < 1 \quad \text{または} \quad |a| = 1, b \neq 0 \quad \text{または} \quad |a| > 1, b^2 < a^2 - 1.$$

以上の 3 つの範囲を図示すると次のようになる。青色が求める領域、青線が含む境界、破線・白丸が含まない境界である。



【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 32 分。判別式そのものより、 $|a| = 1$ で 2 次の係数が消える場合を一次方程式として数え直すことが最大の採点ポイントである。(3) は C, D の交点数を別々に表へ置くと、単位円の内部、双曲線の内側、直線 $a = \pm 1$ の 3 種類を漏れなく拾える。頂点 $(\pm 1, 0)$ は含まれないため、図の白丸まで答案に反映する。

【第 4 問】

袋の中に 1, 2, 3, 4, 5 の番号が 1 つずつ書かれた 5 つの玉が入っている。この中から無作為に 1 個の玉を取り出し、玉に書かれている数字を記録したのち袋に戻すという操作を行う。その操作を繰り返し、記録された数字の和が 3 の倍数になった時点で終了する。ただし、1 回目で 3 の倍数が出た場合は、その時点で終了とする。 n 回目の操作で終了する確率を p_n とする。

- (1) p_1, p_2 を求めよ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、 p_n を n の式で表せ。

【方針】

記録された和そのものではなく、3 で割った余りだけを状態として見る。1 回目で終了する場合を除くと、未終了の余りは 1 または 2 だけである。どちらの余りにいても、次に終了する確率は $2/5$ 、終了しない確率は $3/5$ で一定になるため、 n 回目で初めて終了する確率を等比的に求める。

【解答】

玉に書かれた数を 3 で割った余りで分類する。余り 0 は 3 の 1 個、余り 1 は 1, 4 の 2 個、余り 2 は 2, 5 の 2 個である。したがって各回で余り 0, 1, 2 が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}$ である。

(1) 1 回目で終了するのは、1 回目に余り 0、すなわち数字 3 が出た場合である。よって $p_1 = \frac{1}{5}$ である。

2 回目で終了するには、1 回目では終了せず、2 回目で余りの和が 0 になればよい。1 回目の余りが 1 なら 2 回目は余り 2、1 回目の余りが 2 なら 2 回目は余り 1 である。したがって $p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$ である。

(2) 1 回目で終了しない確率は $\frac{4}{5}$ である。終了していないとき、現在の和の余りは 1 または 2 である。余りが 1 のときは次に余り 2 が出ると終了し、余りが 2 のときは次に余り 1 が出ると終了する。どちらの場合も終了する確率は $\frac{2}{5}$ であり、終了しない確率は $\frac{3}{5}$ である。

したがって $n \geq 3$ のとき、1 回目で終了せず、2 回目から $(n-1)$ 回目までは終了せず、 n 回目で終了する確率は $p_n = \frac{4}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} \frac{2}{5}$ である。整理して $p_n = \frac{8 \cdot 3^{n-2}}{5^n}$ を得る。

【総評】 難度 5、目安時間 16 分。余り 0, 1, 2 の状態だけを見れば、複雑な和を追う必要はない。採点上は、未終了状態では余りが 1 または 2 に限られ、そのどちらからでも次に終了する確率が $2/5$ で同じになることを説明するのが重要である。典型ミスは、数字 3 を引いたときだけでなく、累積和が 3 の倍数になる場合も終了する点を見落とすことである。

【第 5 問】

p は $0 < p < 1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1 = 1$ および関係式

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + p \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。

- (1) $n \geq 2$ のとき、 a_n を求めよ。
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} na_n = 20$ であるとき、 p の値を求めよ。

【方針】

与えられた和の式を $S_n = 1/a_1 + \cdots + 1/a_n$ とおき、 n の式と $n-1$ の式を引いて $1/a_n$ の漸化式を作る。 a_2 は $n=1$ から決まり、以後は公比 $1/2$ の等比数列になる。(2) は $n=1$ の項を分け、 $\sum n/2^{n-2}$ を基本的な等比級数の和に直して p を決める。

【解答】

(1) $S_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$ とおく。条件は $S_n = \frac{1}{a_{n+1}} + p$ である。

まず $n=1$ を代入すると、 $a_1 = 1$ より $1 = \frac{1}{a_2} + p$ である。したがって $\frac{1}{a_2} = 1 - p$, $a_2 = \frac{1}{1-p}$ である。

次に $n \geq 2$ について、 n の式と $n-1$ の式を引く。 $S_n - S_{n-1} = \left(\frac{1}{a_{n+1}} + p\right) - \left(\frac{1}{a_n} + p\right)$ である。左辺は $1/a_n$ なので $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$ となる。よって $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n}$ であり、 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ である。

したがって $n \geq 2$ では $a_n = a_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{(1-p)2^{n-2}}$ である。

(2) (1) より

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n = 1 + \frac{1}{1-p} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^{n-2}}$$

である。ここで $m = n-2$ とおくと

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^{n-2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+2}{2^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{2^m} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m}$$

である。基本的な等比級数の和から

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = 2, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{2^m} = 2$$

なので $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^{n-2}} = 2 + 4 = 6$ である。

よって $\sum_{n=1}^{\infty} na_n = 1 + \frac{6}{1-p}$ である。これが 20 に等しいから $1 + \frac{6}{1-p} = 20$ であり、 $1-p = \frac{6}{19}$ を得る。したがって $p = \frac{13}{19}$ である。これは $0 < p < 1$ を満たす。

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。和で定義された条件は、隣り合う式を引くと一気に漸化式になる。採点上は $n=1$ から a_2 を先に求めること、 $n \geq 2$ の範囲で $a_{n+1} = a_n/2$ とすることを明確に分けるとよい。典型ミスは、逆数の漸化式 $1/a_{n+1} = 2/a_n$ から $a_{n+1} = 2a_n$ と逆にしてしまうことである。

【第 6 問】

座標平面において、点 $(1, 1)$ を中心とする半径 1 の円の内部を D とする。 r を正の実数とし、3 点 $(0, 0)$, $(r, 0)$, $(0, r)$ を頂点とする三角形を T とする。 T と D の共通部分を T から取り除いて得られる図形の面積を $S(r)$ とする。 $S(r) - 2r$ の最小値とそれを与える r の値を求めよ。

【方針】

三角形と円の共通部分を、直線 $x + y = r$ が単位円を切り取る面積 $A(r)$ として扱う。座標 $u = (x + y - 2)/\sqrt{2}$ を使えば、面積の増加率は切り口の弦長から求まる。円と交わらない両側の範囲も含めて導関数の符号を調べ、 $r = 3$ での面積は逆三角関数を使わず、円から円弧部分を引いて計算する。

【解答】

円 D の内部では $x > 0, y > 0$ である。したがって $T \cap D$ は、円 D のうち

$$x + y \leq r$$

を満たす部分である。

$$u = \frac{x + y - 2}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x - y}{\sqrt{2}}$$

と座標を取り直すと、円は

$$u^2 + v^2 < 1$$

となり、三角形の斜辺 $x + y = r$ は

$$u = \frac{r - 2}{\sqrt{2}}$$

となる。この座標変換は回転と平行移動なので面積を変えない。

$T \cap D$ の面積を $A(r)$ とおく。三角形 T の面積は $r^2/2$ だから

$$F(r) := S(r) - 2r = \frac{r^2}{2} - A(r) - 2r.$$

円上で $x + y$ がとる範囲は

$$2 - \sqrt{2} \leq x + y \leq 2 + \sqrt{2}$$

である。

円と交わらない範囲 $0 < r \leq 2 - \sqrt{2}$ では $A(r) = 0$ なので

$$F'(r) = r - 2 < 0.$$

また $r \geq 2 + \sqrt{2}$ では $A(r) = \pi$ なので

$$F'(r) = r - 2 > 0.$$

円を横切る範囲

$$2 - \sqrt{2} < r < 2 + \sqrt{2}$$

とする。

$$s = \frac{r - 2}{\sqrt{2}}$$

とおけば、 $A(r)$ は単位円の $u \leq s$ の部分の面積である。 s の位置での弦長は

$$2\sqrt{1 - s^2}$$

であり、 $ds/dr = 1/\sqrt{2}$ だから

$$A'(r) = 2\sqrt{1 - s^2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2 - (r - 2)^2}.$$

よって

$$F'(r) = r - 2 - \sqrt{2 - (r - 2)^2}.$$

$r < 2$ では明らかに $F'(r) < 0$ である。 $2 \leq r < 3$ では

$$(r-2)^2 < 2 - (r-2)^2$$

なので $F'(r) < 0$ 、 $3 < r \leq 2 + \sqrt{2}$ では不等号が逆になり $F'(r) > 0$ である。以上を両側の範囲とつなげると、 F は $r = 3$ まで減少し、その後増加する。したがって最小となるのは

$$r = 3$$

である。

$r = 3$ では $s = 1/\sqrt{2}$ である。単位円のうち $u > 1/\sqrt{2}$ の小さい円弧部分は、中心角 $\pi/2$ の扇形から、2本の半径が作る直角三角形を引いたものである。その面積は

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

したがって

$$A(3) = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

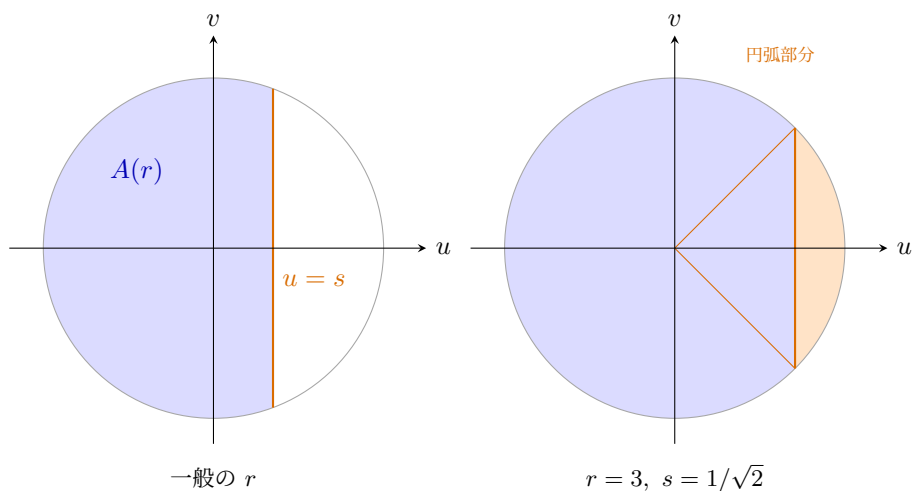
ゆえに

$$\begin{aligned} F(3) &= \frac{9}{2} - \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - 6 \\ &= -2 - \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

よって

$$\text{最小値 } -2 - \frac{3\pi}{4}, \quad r = 3$$

である。



【総評】 難度 7、計算量 7。目安時間は 32 分。円の内部が第 1 象限にあるため、三角形との共通部分を半平面 $x + y \leq r$ だけで表せることが出発点である。採点上は、面積の増加率に弦長だけでなく $ds/dr = 1/\sqrt{2}$ を掛けること、円と交わらない両側の範囲も調べて大域的最小を保証することが重要である。 $r = 3$ の面積は円扇形と三角形で評価でき、逆三角関数は不要である。