

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2015 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

a を実数とする。 xy 平面において、関数 $y = x^2$ と $y = -x^2 + 2ax - a$ のグラフをそれぞれ C_1, C_2 とする。

- (1) C_1 と C_2 が共有点をもたないような a の範囲を求めよ。
- (2) a が (1) で求めた範囲にあるとき、 C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本存在することを示せ。
- (3) a が (1) で求めた範囲を動くとき、 C_1 と C_2 の両方に接する 2 本の直線の交点が描く図形を図示せよ。

第 2 問

a, b を実数とする。 xy 平面において、連立不等式

$$3x - 4y + 4 \geq 0, \quad 4x + 3y - 28 \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

の表す領域を D とし、不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 1$ の表す領域を E とする。

- (1) E のすべての点が D の点となるような点 (a, b) 全体のなす図形の面積を求めよ。
- (2) E のいずれかの点が D の点となるような点 (a, b) 全体のなす図形の面積を求めよ。

第 3 問

サイコロを 4 回投げて出た目の数を順に a, b, c, d とする。

- (1) $ab + cd = 6$ が成り立つ確率を求めよ。
- (2) $ab - cd = 1$ が成り立つ確率を求めよ。

第 4 問

$-1 < x < 1$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ で、次の 2 つの条件を満たすものを考える。

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad (-1 < x < 1, -1 < y < 1)$$

$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で、そこでの微分係数は 1 である

- (1) $-1 < x < 1$ に対し $f(x) = -f(-x)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $f(x)$ は $-1 < x < 1$ の範囲で微分可能であることを示し、導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

第 5 問

α, β, γ を複素数として、 $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ とおく。実部と虚部がどちらも整数である複素数全体の集合を R とする。また、 i を虚数単位とする。

(1) 次の 2 条件 (a), (b) は同値であることを示せ。

(a) すべての整数 n に対し、 $f(n)$ は R の要素である。

(b) $2\alpha, \beta - \alpha, \gamma$ はすべて R の要素である。

(2) x が R の要素ならば、 $\frac{x(x+1)}{1-i}$ は R の要素であることを示せ。

(3) 次の 2 条件 (c), (d) は同値であることを示せ。

(c) すべての R の要素 x に対し、 $f(x)$ は R の要素である。

(d) $(1-i)\alpha, \beta - \alpha, \gamma$ はすべて R の要素である。

第 6 問

n を自然数とし、

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}, \quad J_n = \int_0^1 \log(\sqrt{1+x^n} + 1) dx$$

とおく。ただし、対数は自然対数とする。

(1) 実数 $t \geq 0$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+t}+1}{2}\right) \leq \frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq J_n - \log 2 \leq \frac{1}{4(n+1)}$$

(3) 導関数 $\frac{d}{dx} \log(\sqrt{1+x^n} + 1)$ を求めよ。

(4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - I_n)$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)