

東北大学 2015 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a を実数とする。 xy 平面において、関数 $y = x^2$ と $y = -x^2 + 2ax - a$ のグラフをそれぞれ C_1, C_2 とする。

- (1) C_1 と C_2 が共有点をもたないような a の範囲を求めよ。
- (2) a が (1) で求めた範囲にあるとき、 C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本存在することを示せ。
- (3) a が (1) で求めた範囲を動くとき、 C_1 と C_2 の両方に接する 2 本の直線の交点が描く図形を図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は 2 つの放物線の共有点を求める 2 次方程式の判別式を見る。(2) は傾き m の C_1 の接線を作り、それが C_2 にも接する条件を m の 2 次方程式にする。(3) は 2 本の共通接線の傾きを m_1, m_2 とし、解と係数の関係から交点の座標を a で表して軌跡に直す。

【解答】

(1)

共有点の x 座標は $x^2 = -x^2 + 2ax - a$ を満たす。整理すると $2x^2 - 2ax + a = 0$ すなわち $x^2 - ax + \frac{a}{2} = 0$ である。共有点をもたない条件は、この 2 次方程式の判別式が負であることだから $D = a^2 - 2a = a(a - 2) < 0$ である。したがって $0 < a < 2$ である。

(2)

$C_1: y = x^2$ の傾き m の接線は、接点の x 座標が $m/2$ なので $y = mx - \frac{m^2}{4}$ である。この直線が $C_2: y = -x^2 + 2ax - a$ にも接する条件を求める。代入して $-x^2 + 2ax - a = mx - \frac{m^2}{4}$ すなわち $x^2 + (m - 2a)x + a - \frac{m^2}{4} = 0$ が重解をもてばよい。判別式を 0 にすると $(m - 2a)^2 - 4\left(a - \frac{m^2}{4}\right) = 0$ であり、整理して $m^2 - 2am + 2a(a - 1) = 0$ を得る。

この m の 2 次方程式の判別式は $(-2a)^2 - 4 \cdot 2a(a - 1) = 4a(2 - a)$ である。(1) の範囲 $0 < a < 2$ ではこれは正なので、異なる 2 つの実数解 m が存在する。したがって共通接線は 2 本存在する。

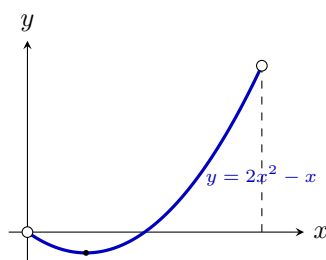
(3)

2 本の共通接線の傾きを m_1, m_2 とする。上の 2 次方程式より $m_1 + m_2 = 2a$, $m_1 m_2 = 2a(a - 1)$ である。2 本の直線は $y = m_1 x - \frac{m_1^2}{4}$, $y = m_2 x - \frac{m_2^2}{4}$ であるから、その交点の x 座標は $(m_1 - m_2)x = \frac{m_1^2 - m_2^2}{4}$ より $x = \frac{m_1 + m_2}{4} = \frac{a}{2}$ である。 y 座標は

$$y = m_1 \cdot \frac{a}{2} - \frac{m_1^2}{4} = \frac{m_1(m_1 + m_2)}{4} - \frac{m_1^2}{4} = \frac{m_1 m_2}{4} = \frac{a(a - 1)}{2}$$

である。

したがって $x = a/2$ とおけば、 $0 < a < 2$ より $0 < x < 1$ であり、 $y = \frac{(2x)(2x - 1)}{2} = 2x^2 - x$ である。よって交点の描く図形は $y = 2x^2 - x$, $0 < x < 1$ で表される放物線の一部である。端点 $(0, 0)$, $(1, 1)$ は含まない。



端点 $(0, 0)$, $(1, 1)$ は含まない。

▶ 解法 2 (2 つの接点を同時に置く)

【方針】

C_1, C_2 上の接点の x 座標をそれぞれ s, t と置き、2 本の接線が同じ直線になる条件を係数比較する。2 つの共通接線を与える s の 2 次方程式から、その交点を解と係数の関係で求める。

【解答】

(1)

共有点の x 座標は

$$x^2 = -x^2 + 2ax - a$$

を満たす。すなわち

$$x^2 - ax + \frac{a}{2} = 0$$

であり、共有点をもたない条件は

$$a^2 - 2a < 0$$

である。よって

$$0 < a < 2$$

となる。

(2)

C_1 の $x = s$ における接線は

$$y = 2sx - s^2$$

である。 C_2 の $x = t$ における接線は

$$y = 2(a - t)x + t^2 - a$$

である。両者が同じ直線である条件は

$$s + t = a, \quad s^2 + t^2 = a$$

である。 $t = a - s$ を代入すると

$$2s^2 - 2as + a^2 - a = 0$$

を得る。この 2 次方程式の判別式は

$$4a^2 - 8(a^2 - a) = 4a(2 - a) > 0$$

であるから、 $0 < a < 2$ では相異なる 2 つの実数解 s_1, s_2 が存在する。したがって共通接線は 2 本存在する。

(3)

上の 2 次方程式から

$$s_1 + s_2 = a, \quad s_1 s_2 = \frac{a^2 - a}{2}$$

である。2 本の接線

$$y = 2s_1 x - s_1^2, \quad y = 2s_2 x - s_2^2$$

の交点を (x, y) とすると、差を取って

$$2(s_1 - s_2)x = (s_1 - s_2)(s_1 + s_2)$$

である。 $s_1 \neq s_2$ なので

$$x = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{a}{2}$$

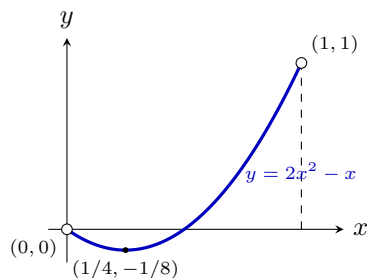
となる。また

$$y = 2s_1 \frac{a}{2} - s_1^2 = s_1(a - s_1) = s_1 s_2 = \frac{a(a - 1)}{2}$$

である。 $a = 2x$ を消去すると

$$y = 2x^2 - x, \quad 0 < x < 1$$

を得る。



端点は $a = 0, 2$ に対応し、(1) の範囲に含まれないので白丸で表す。

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 22 分。判別式と接線条件を 2 段階で使う問題である。採点点は、共有点なしの範囲を $0 < a < 2$ と出すこと、傾き m の共通接線条件を作ること、2 本の接線の交点を解と係数の関係だけで処理することである。軌跡では a の範囲から $0 < x < 1$ となり、端点を含まない点まで図示に反映したい。第 2 解法では主解法と異なる構造を用い、同じ結論を独立に再現した。

【第 2 問】

a, b を実数とする。 xy 平面において、連立不等式

$$3x - 4y + 4 \geq 0, \quad 4x + 3y - 28 \leq 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

の表す領域を D とし、不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 1$ の表す領域を E とする。

- (1) E のすべての点が D の点となるような点 (a, b) 全体のなす図形の面積を求めよ。
- (2) E のいずれかの点が D の点となるような点 (a, b) 全体のなす図形の面積を求めよ。

【方針】

D は 4 本の直線で囲まれる凸四角形である。(1) では半径 1 の円板が完全に D に入る条件を、中心から各辺までの距離が 1 以上という条件に直す。(2) では円板が D と共有点をもつ中心の集合は、 D から距離 1 以内の点全体である。これは D の外側に幅 1 の帯と半径 1 の円弧部分を付けた図形なので、面積を「もとの面積 + 辺に沿う長方形 + 頂点まわりの扇形」に分けて求める。

【解答】

領域 D は $x \geq 0, y \geq 0, 3x - 4y + 4 \geq 0, 4x + 3y - 28 \leq 0$ で表される。境界の交点を調べると、 D は $(0, 0), (0, 1), (4, 4), (7, 0)$ を頂点にもつ凸四角形である。

(1)

E は中心 (a, b) 、半径 1 の円板である。 E のすべての点が D に入るには、中心が各境界直線から内側に少なくとも 1 だけ離れていけばよい。

$x \geq 0, y \geq 0$ から $a \geq 1, b \geq 1$ である。また直線 $3x - 4y + 4 = 0$ までの距離を用いると $\frac{3a - 4b + 4}{5} \geq 1$ すなわち $3a - 4b \geq 1$ である。さらに直線 $4x + 3y - 28 = 0$ については $\frac{28 - 4a - 3b}{5} \geq 1$ すなわち $4a + 3b \leq 23$ である。

したがって中心 (a, b) の範囲は $a \geq 1, b \geq 1, 3a - 4b \geq 1, 4a + 3b \leq 23$ である。この領域は 3 頂点

$$\left(\frac{5}{3}, 1\right), (5, 1), \left(\frac{19}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

をもつ三角形である。底辺を $b = 1$ 上の長さ $5 - 5/3 = 10/3$ と見れば、高さは $13/5 - 1 = 8/5$ であるから、面積は $\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{3}$ である。

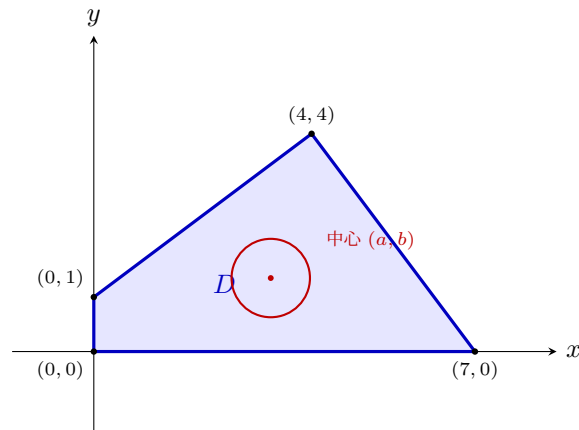
(2)

E のいずれかの点が D の点であるとは、中心 (a, b) から領域 D までの距離が 1 以下であることと同値である。したがって求める図形は、四角形 D の外側に距離 1 以内の部分をつけ加えた図形である。

まず D の面積を求める。頂点を $(0, 0), (7, 0), (4, 4), (0, 1)$ の順に見ると、面積は $\frac{1}{2}|7 \cdot 4 + 4 \cdot 1| = 16$ である。

次に周の長さを求める。辺の長さは 1, 5, 5, 7 であるから、周長は 18 である。各辺の外側には幅 1 の長方形の部分付き、その面積の合計は周長に等しく 18 である。

さらに各頂点の外側には半径 1 の扇形が付く。凸四角形の外角の和は 2π なので、これらの扇形の面積の合計は半径 1 の円 1 個分、すなわち π である。よって求める面積は $16 + 18 + \pi = 34 + \pi$ である。



【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 25 分。(1) は内側への平行移動で小さい三角形を求める問題、(2) は外側への距離 1 の膨張を求める問題であり、性質が違う。採点点は、各斜線の法線の長さが 5 であること、内側条件から三角形の 3 頂点を出すこと、外側条件では角が丸くなるため面積が D の面積 + 周長 + π になること。特に (2) を多角形だけで処理しないよう注意したい。別解監査では、内側平行領域と外側距離 1 領域という凸図形の核心を保ったまま分割順だけを変える案は独立解法として数えていない。

【第 3 問】

サイコロを 4 回投げて出た目の数を順に a, b, c, d とする。

- (1) $ab + cd = 6$ が成り立つ確率を求めよ。
- (2) $ab - cd = 1$ が成り立つ確率を求めよ。

【方針】

2 回のサイコロのできる積の分布を先に作る。 $ab + cd = 6$ は積が 1 から 5 の組だけを足せばよい。 $ab - cd = 1$ は、積の値が 1 だけ違う組を分布表から拾って合計する。4 回のサイコロは順序つきなので、分母は 6^4 である。

【解答】

2 個のサイコロの目の積の出方を数える。以下、積が r となる順序つきの出方の数を $N(r)$ と書く。必要な値については $N(1) = 1, N(2) = 2, N(3) = 2, N(4) = 3, N(5) = 2, N(6) = 4, N(8) = 2, N(9) = 1, N(10) = 2, N(15) = 2, N(16) = 1, N(24) = 2, N(25) = 1$ である。

(1)
 $ab + cd = 6$ となるには、積の組が $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ であればよい。したがって有利な出方は $N(1)N(5) + N(2)N(4) + N(3)N(3) + N(4)N(2) + N(5)N(1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 20$ 通りである。全事象は 6^4 通りなので、求める確率は $\frac{20}{6^4} = \frac{5}{324}$ である。

(2)
 $ab - cd = 1$ となるには、 $ab = r, cd = r - 1$ となる積の値を足し合わせればよい。該当する積は $r = 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 16, 25$ であり、それぞれの出方の数は 2, 4, 6, 6, 8, 2, 2, 2, 2 である。よって有利な出方は $2 + 4 + 6 + 6 + 8 + 2 + 2 + 2 + 2 = 34$ 通りである。したがって確率は $\frac{34}{6^4} = \frac{17}{648}$ である。

【総評】 難度 4、計算量 4。目安時間は 12 分。4 個の目を直接並べるより、2 個ずつの積の分布に圧縮すると見通しがよい。採点点は、積 4 の出方が 3 通り、積 6 の出方が 4 通りなど、順序つきで数えること、(2) で差が 1 の積だけを漏れなく拾うことである。表を作った後は掛け算と足し算だけなので、分母 6^4 を最後に付ける形で整理したい。別解監査では、4 個を直接列挙する案も積の頻度分布を別順序で書くものに過ぎないため、独立解法として数えていない。

【第 4 問】

$-1 < x < 1$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ で、次の 2 つの条件を満たすものを考える。

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad (-1 < x < 1, -1 < y < 1)$$

$f(x)$ は $x = 0$ で微分可能で、そこでの微分係数は 1 である

- (1) $-1 < x < 1$ に対し $f(x) = -f(-x)$ が成り立つことを示せ。
- (2) $f(x)$ は $-1 < x < 1$ の範囲で微分可能であることを示し、導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (3) $f(x)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず $x = y = 0$ から $f(0) = 0$ を出し、 $y = -x$ で奇関数性を示す。微分可能性は、関数方程式を $f((x+y)/(1+xy)) - f(x) = f(y)$ と見て、 $y \rightarrow 0$ の差商を作る。与えられているのは $x = 0$ での微分可能性だけなので、ここから任意の x の微分係数を導く。最後は $f'(x) = 1/(1-x^2)$ を積分し、 $f(0) = 0$ で定数を決める。

【解答】

(1)

$x = y = 0$ を代入すると $f(0) + f(0) = f(0)$ であるから $f(0) = 0$ である。次に $y = -x$ とすると、 $-1 < x < 1$ では $\frac{x+(-x)}{1+x(-x)} = 0$ である。したがって $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ となり、 $f(x) = -f(-x)$ である。

(2)

$-1 < x < 1$ を固定する。 y を 0 に近づけると $z = \frac{x+y}{1+xy}$ とおくと、 $z \rightarrow x$ であり、関数方程式より $f(z) - f(x) = f(y)$ である。また $z - x = \frac{x+y-x(1+xy)}{1+xy} = \frac{(1-x^2)y}{1+xy}$ である。したがって $\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{f(y)}{y} \cdot \frac{1+xy}{1-x^2}$ である。

条件より f は 0 で微分可能で、 $f'(0) = 1$ であり、また $f(0) = 0$ であるから $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 1$ である。よって $y \rightarrow 0$ 、すなわち $z \rightarrow x$ とすると $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ を得る。したがって f は $-1 < x < 1$ の全体で微分可能であり、 $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ である。

(3)

(2) より $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right)$ である。 $f(0) = 0$ なので、0 から x まで積分して

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} [\log(1+t) - \log(1-t)]_0^x$$

である。したがって $f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ である。

▶ 解法 2 (分数変換で乗法型方程式に直す)

【方針】

$u = (1+x)/(1-x)$ によって区間 $(-1, 1)$ を正の実数へ移す。加法公式型の演算が積に変わるため、関数方程式を $F(uv) = F(u) + F(v)$ とし、 $u = 1$ での微分係数から対数関数を一意に決める。

【解答】

(1)

$x = y = 0$ を代入すると $f(0) = 0$ である。さらに $y = -x$ とすれば

$$f(x) + f(-x) = f(0) = 0$$

だから

$$f(x) = -f(-x)$$

である。

(2)

$u > 0$ に対して

$$x = \frac{u-1}{u+1}$$

とおき、

$$F(u) = f\left(\frac{u-1}{u+1}\right)$$

と定める。恒等式

$$\frac{1 + \frac{x+y}{1+xy}}{1 - \frac{x+y}{1+xy}} = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y}$$

より、もとの関数方程式は

$$F(uv) = F(u) + F(v) \quad (u > 0, v > 0)$$

に変わる。

$x = (u-1)/(u+1)$ について

$$\left. \frac{dx}{du} \right|_{u=1} = \frac{1}{2}$$

であり、 $f'(0) = 1$ だから F は $u = 1$ で微分可能で

$$F'(1) = \frac{1}{2}$$

である。

任意の $u > 0$ を固定し、 $v_n = u^{1/n}$ とおくと $v_n \rightarrow 1$ であり、関数方程式から

$$F(u) = nF(v_n)$$

である。したがって

$$F(u) = \frac{F(v_n) - F(1)}{v_n - 1} n(v_n - 1)$$

である。 $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\frac{F(v_n) - F(1)}{v_n - 1} \rightarrow F'(1) = \frac{1}{2}, \quad n(u^{1/n} - 1) \rightarrow \log u$$

だから

$$F(u) = \frac{1}{2} \log u$$

を得る。

ここで $u = (1+x)/(1-x)$ を戻せば

$$f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

である。この式は $-1 < x < 1$ で微分可能であり、

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{1-x^2}$$

となる。

(3)

以上で関数は一意に定まり、求める関数は

$$f(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 5。目安時間は 22 分。加法公式型の関数方程式だが、最初から逆双曲線関数を知っている必要はない。採点点は、 $f(0) = 0$ 、奇関数性、そして $x = 0$ での微分可能性から任意の x での差商を作る部分である。関数方程式を形式的に y で微分するだけでは仮定不足なので、 $z = (x+y)/(1+xy)$ と置いた差商の極限を明記すると厳密になる。第 2 解法では主解法と異なる構造を用い、同じ結論を独立に再現した。

【第 5 問】

α, β, γ を複素数として、 $f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ とおく。実部と虚部がどちらも整数である複素数全体の集合を R とする。また、 i を虚数単位とする。

- (1) 次の 2 条件 (a), (b) は同値であることを示せ。
 - (a) すべての整数 n に対し、 $f(n)$ は R の要素である。
 - (b) $2\alpha, \beta - \alpha, \gamma$ はすべて R の要素である。
- (2) x が R の要素ならば、 $\frac{x(x+1)}{1-i}$ は R の要素であることを示せ。
- (3) 次の 2 条件 (c), (d) は同値であることを示せ。
 - (c) すべての R の要素 x に対し、 $f(x)$ は R の要素である。
 - (d) $(1-i)\alpha, \beta - \alpha, \gamma$ はすべて R の要素である。

【方針】

R は実部・虚部が整数である複素数、つまり加法・減法・乗法で閉じている集合である。(1) は整数値 2 次式を $n(n+1)/2$ と n の組で表す。(2) は $x = a + bi$ として $x(x+1)$ の実部・虚部の偶奇が一致することを示す。(3) は (2) を使える形に $f(x) = ((1-i)\alpha)x(x+1)/(1-i) + (\beta - \alpha)x + \gamma$ と分解し、逆向きは $x = 0, 1, -1, i$ の代入から係数条件を取り出す。

【解答】

(1)

まず

$$f(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma = 2\alpha \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (\beta - \alpha)n + \gamma$$

である。 n が整数なら $n(n+1)/2$ も整数である。したがって、 $2\alpha, \beta - \alpha, \gamma$ がすべて R の要素なら、すべての整数 n に対して $f(n)$ も R の要素である。よって (b) から (a) が従う。

逆に (a) が成り立つとする。 $n = 0$ を代入して $\gamma = f(0) \in R$ である。また $f(1) + f(-1) - 2f(0) = 2\alpha$ だから $2\alpha \in R$ である。さらに $f(1) - f(0) = \alpha + \beta$ であるから $\beta - \alpha = (f(1) - f(0)) - 2\alpha \in R$ である。したがって (b) が成り立つ。以上より (a), (b) は同値である。

(2)

$x = a + bi$ とおく。ただし a, b は整数である。このとき $x(x+1) = (a+bi)(a+1+bi) = A + Bi$ と書けば $A = a(a+1) - b^2$, $B = b(2a+1)$ である。 $a(a+1)$ は偶数なので $A \equiv -b^2 \equiv b \pmod{2}$ であり、また $B = b(2a+1) \equiv b \pmod{2}$ である。したがって A と B は同じ偶奇である。

よって $\frac{x(x+1)}{1-i} = \frac{(A+Bi)(1+i)}{2} = \frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}i$ であり、 $A-B$ と $A+B$ はともに偶数である。したがって実部・虚部はいずれも整数であり、 $\frac{x(x+1)}{1-i} \in R$ である。

(3)

まず (d) が成り立つとする。任意の $x \in R$ に対して、(2) より $\frac{x(x+1)}{1-i} \in R$ である。また R は加法と乗法で閉じている。したがって

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = (1-i)\alpha \cdot \frac{x(x+1)}{1-i} + (\beta - \alpha)x + \gamma$$

は R の要素である。よって (c) が成り立つ。

逆に (c) が成り立つとする。整数はすべて R の要素なので、(1) を用いると 2α , $\beta - \alpha$, γ はいずれも R の要素である。さらに $i \in R$ なので $f(i) \in R$ である。 $\delta = \beta - \alpha$ とおくと $\delta \in R$ であり、 $f(i) = -\alpha + \beta i + \gamma = -\alpha + (\alpha + \delta)i + \gamma$ である。したがって $f(i) - \gamma - i\delta = (i-1)\alpha$ は R の要素である。両辺に -1 を掛けても R に属するので $(1-i)\alpha \in R$ である。よって (d) が成り立つ。

以上より (c), (d) は同値である。

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 30 分。整数値多項式の考え方を、実部・虚部が整数の複素数へ広げる問題である。採点点は、 $f(n)$ を $n(n+1)/2$ で表すこと、 $x(x+1)/(1-i)$ の実部・虚部が整数になる偶奇確認、(3) の逆向きで $x=i$ を代入して $(1-i)\alpha$ を取り出すことである。 R が四則のうち加法・減法・乗法で閉じていることを使ってよいが、2 で割る操作は常に閉じるわけではない点に注意したい。別解監査では、有限差分とガウス整数の偶奇が本質であり、代入順を変えるだけの証明は独立解法として数えていない。

【第 6 問】

n を自然数とし、

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}, \quad J_n = \int_0^1 \log(\sqrt{1+x^n} + 1) dx$$

とおく。ただし、対数は自然対数とする。

(1) 実数 $t \geq 0$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+t}+1}{2}\right) \leq \frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0 \leq J_n - \log 2 \leq \frac{1}{4(n+1)}$$

(3) 導関数 $\frac{d}{dx} \log(\sqrt{1+x^n} + 1)$ を求めよ。

(4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - I_n)$ を求めよ。

【方針】

(1) は $u = \sqrt{1+t}$ とおき、基本不等式 $\log X \leq X - 1$ に帰着する。(2) は (1) を $t = x^n$ に適用し、 $\sqrt{1+x^n} + 1 \geq 2$ で上から評価する。(3) は合成関数の微分である。(4) は J_n を部分積分して、 $1 - I_n$ と同じ積分が現れる形に変形し、(2) から $J_n \rightarrow \log 2$ を使う。

【解答】

(1)

$u = \sqrt{1+t}$ とおくと $u \geq 1$ であり、 $\frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)} = \frac{u^2-1}{2(u+1)} = \frac{u-1}{2}$ である。一方、 $X = (u+1)/2$ とおくと $X > 0$ であり、基本不等式 $\log X \leq X - 1$ より $\log \frac{u+1}{2} \leq \frac{u+1}{2} - 1 = \frac{u-1}{2}$ である。したがって

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+t}+1}{2}\right) \leq \frac{t}{2(\sqrt{1+t}+1)}$$

が成り立つ。

(2)

$0 \leq x \leq 1$ では $x^n \geq 0$ なので $\sqrt{1+x^n} + 1 \geq 2$ であり、したがって

$$J_n - \log 2 = \int_0^1 \log\left(\frac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}\right) dx \geq 0$$

である。また (1) に $t = x^n$ を代入すると

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}\right) \leq \frac{x^n}{2(\sqrt{1+x^n}+1)}$$

である。分母は $2(\sqrt{1+x^n}+1) \geq 4$ だから $\log\left(\frac{\sqrt{1+x^n}+1}{2}\right) \leq \frac{x^n}{4}$ である。よって

$$0 \leq J_n - \log 2 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4} dx = \frac{1}{4(n+1)}$$

である。

(3)

合成関数の微分により

$$\frac{d}{dx} \log(\sqrt{1+x^n}+1) = \frac{1}{\sqrt{1+x^n}+1} \cdot \frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{1+x^n}}$$

である。したがって

$$\frac{d}{dx} \log(\sqrt{1+x^n}+1) = \frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{1+x^n}(\sqrt{1+x^n}+1)}$$

である。

(4)

まず $1 - I_n$ を変形する。

$$1 - I_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^n}}\right) dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^n}-1}{\sqrt{1+x^n}} dx$$

である。分子を有理化して $\sqrt{1+x^n}-1 = \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}+1}$ だから

$$1 - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}(\sqrt{1+x^n}+1)} dx$$

である。

次に J_n を部分積分する。(3) より

$$J_n = [x \log(\sqrt{1+x^n}+1)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{1+x^n}(\sqrt{1+x^n}+1)} dx$$

である。したがって

$$J_n = \log(\sqrt{2}+1) - \frac{n}{2} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}(\sqrt{1+x^n}+1)} dx$$

である。上で得た式と比較して $J_n = \log(\sqrt{2}+1) - \frac{n}{2}(1 - I_n)$ となる。よって $n(1 - I_n) = 2\{\log(\sqrt{2}+1) - J_n\}$ である。

(2) より $0 \leq J_n - \log 2 \leq \frac{1}{4(n+1)}$ だから $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \log 2$ である。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - I_n) = 2\{\log(\sqrt{2}+1) - \log 2\} = 2 \log \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

である。

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 30 分。前半の不等式評価で $J_n \rightarrow \log 2$ を作り、後半の部分積分で $n(1 - I_n)$ と結びつける構成である。採点点は、 $\log X \leq X - 1$ の使い方、 $J_n - \log 2$ の上界、(3) の微分、(4) で $1 - I_n$ と部分積分後の積分が同じになることの確認である。極限值は J_n の極限を代入するだけなので、そこまでの式変形を丁寧に保つことが重要である。別解監査では、設問の誘導どおり J_n の評価と部分積分で I_n を結ぶことが核心であり、同じ恒等式の変形順だけを変える案は独立解法として数えていない。