

東北大学 2015 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面において、次の式が表す曲線を C とする。

$$x^2 + 4y^2 = 1, \quad x > 0, \quad y > 0$$

P を C 上の点とする。 P で C に接する直線を l とし、 P を通り l と垂直な直線を m として、 x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする。 P が C 上の点全体を動くとき、 S の最大値とそのときの P の座標を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

楕円上の点を $P = (\cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta)$ と置く。接線の傾きは陰関数微分で求め、法線 m の傾きを出す。 m の x 切片と y 切片を求めると、座標軸と作る三角形の面積が $\sin 2\theta$ に比例するので、最大は $\theta = \pi/4$ で決まる。

【解答】

楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ の第 1 象限部分なので、

$$P = \left(\cos \theta, \frac{1}{2} \sin \theta \right) \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

とおける。

陰関数微分により $2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0$ だから、 P における接線 l の傾きは $-\frac{x}{4y} = -\frac{\cos \theta}{2 \sin \theta}$ である。したがって法線 m の傾きは $2 \tan \theta$ である。よって m の方程式は $y - \frac{1}{2} \sin \theta = 2 \tan \theta (x - \cos \theta)$ である。

x 軸との交点を求めるため $y = 0$ とすると $-\frac{1}{2} \sin \theta = 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (x - \cos \theta)$ である。 $\sin \theta > 0$ なので割って $x - \cos \theta = -\frac{1}{4} \cos \theta$ となり、 x 切片は $\frac{3}{4} \cos \theta$ である。

次に y 軸との交点を求めるため $x = 0$ とすると $y - \frac{1}{2} \sin \theta = -2 \sin \theta$ だから、 y 切片は $-\frac{3}{2} \sin \theta$ である。三角形の面積は切片の絶対値を用いて

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cos \theta \cdot \frac{3}{2} \sin \theta = \frac{9}{16} \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{32} \sin 2\theta$$

である。 $0 < \theta < \pi/2$ では $0 < 2\theta < \pi$ なので、 S は $2\theta = \pi/2$ 、すなわち $\theta = \pi/4$ のとき最大となる。

したがって最大値は $\frac{9}{32}$ であり、そのとき $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$ である。

▶ 解法 2 (法線ベクトルと相加・相乗平均)

【方針】

点を (p, q) のまま扱い、楕円の法線方向 $(p, 4q)$ から 2 つの切片を直接出す。面積は pq に比例するため、楕円の式そのもののへ相加・相乗平均を適用する。

【解答】

点 $P = (p, q)$ とおく。ただし

$$p > 0, \quad q > 0, \quad p^2 + 4q^2 = 1$$

である。楕円 $x^2 + 4y^2 = 1$ の P における法線方向ベクトルは $(p, 4q)$ だから、法線 m は

$$(x, y) = (p, q) + \lambda(p, 4q)$$

と表せる。

x 軸との交点では $q + 4q\lambda = 0$ より $\lambda = -1/4$ である。したがって x 切片は

$$p - \frac{p}{4} = \frac{3p}{4}$$

である。 y 軸との交点では $p + p\lambda = 0$ より $\lambda = -1$ であり、 y 切片は

$$q - 4q = -3q$$

である。

よって三角形の面積は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3p}{4} \cdot 3q = \frac{9pq}{8}$$

である。一方、

$$4pq \leq p^2 + 4q^2 = 1$$

だから

$$S \leq \frac{9}{32}$$

である。等号は $p = 2q$ のときに成り立つ。これと $p^2 + 4q^2 = 1$ を連立すると

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

となる。したがって

$$S_{\max} = \frac{9}{32}, \quad P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 18 分。楕円の第 1 象限を三角関数で置くと、法線の切片計算が整理される。採点点は、接線ではなく法線 m と座標軸で囲む三角形であること、 y 切片が負になるため面積では絶対値を取ること、最後に $\sin 2\theta$ の最大として処理することである。 P の座標は第 1 象限なので、端点ではなく内部の $\theta = \pi/4$ で最大をとる。第 2 解法では主解法と異なる構造を用い、同じ結論を独立に再現した。

【第 2 問】

xy 平面において、3 次関数 $y = x^3 - x$ のグラフを C とし、不等式

$$x^3 - x > y > -x$$

の表す領域を D とする。また、 P を D の点とする。

- (1) P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ。
- (2) P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。

【方針】

C の $x = t$ における接線を作り、点 $P = (u, v)$ を通る条件を t の 3 次方程式にする。 $P \in D$ は $u > 0$, $u + v > 0$, $v < u^3 - u$ を意味し、この 3 つの不等式で 3 次式が $(-\infty, 0)$, $(0, u)$, (u, ∞) に 1 つずつ根をもつことを示す。(2) は根と係数の関係で、傾き $3t_i^2 - 1$ の和と積の条件を処理する。

【解答】

(1)

点 P を $P = (u, v)$ とおく。 $P \in D$ であるから $u^3 - u > v > -u$ であり、特に $u > 0$, $u + v > 0$, $v - u^3 + u < 0$ である。

曲線 $C: y = x^3 - x$ の $x = t$ における接線を求める。導関数は $3x^2 - 1$ なので、接線は $y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$ すなわち $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$ である。この接線が $P = (u, v)$ を通る条件は $v = (3t^2 - 1)u - 2t^3$ であり、整理して $F(t) = 2t^3 - 3ut^2 + u + v = 0$ である。

この 3 次方程式の実根の個数を調べる。まず $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = -\infty$, $F(0) = u + v > 0$ だから、 $(-\infty, 0)$ に少なくとも 1 つの根がある。また $F(u) = 2u^3 - 3u^3 + u + v = v - u^3 + u < 0$ であるから、 $(0, u)$ に少なくとも 1 つの根がある。さらに $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \infty$ なので、 (u, ∞) に少なくとも 1 つの根がある。

3 次方程式の根は高々 3 個であり、上の 3 つの区間は互いに交わらない。したがって実根はちょうど 3 個あり、それぞれ異なる。各根は P を通る C の接線の接点に対応するので、 P を通り C に接する直線は 3 本存在する。

(2)

3 つの接点の x 座標を t_1, t_2, t_3 とする。方程式 $2t^3 - 3ut^2 + u + v = 0$ の根と係数の関係より $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3u}{2}$, $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 0$ である。

接線の傾きは $3t_i^2 - 1$ である。傾きの和が 0 である条件は $(3t_1^2 - 1) + (3t_2^2 - 1) + (3t_3^2 - 1) = 0$ すなわち $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1$ である。一方、

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = (t_1 + t_2 + t_3)^2 - 2(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) = \left(\frac{3u}{2}\right)^2$$

だから $\left(\frac{3u}{2}\right)^2 = 1$ である。 $u > 0$ より $u = \frac{2}{3}$ である。

また、傾きの積が 0 であるから、ある i について $3t_i^2 - 1 = 0$ である。よって、その根を r とおくと $r = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。 $u = 2/3$ のとき、根の和は 1、2 根ずつの積の和は 0 である。根の 1 つが r なら、3 根の積は $r(r^2 - r) = r^3 - r^2$ である。一方、根と係数の関係より $t_1t_2t_3 = -\frac{u+v}{2} = -\frac{2/3+v}{2}$ である。したがって $v = -2(r^3 - r^2) - \frac{2}{3}$ である。

$r = 1/\sqrt{3}$ のとき $v = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ である。これは $-\frac{2}{3} < v < -\frac{10}{27} = u^3 - u$ を満たすので $P \in D$ である。

$r = -1/\sqrt{3}$ のとき $v = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ となるが、これは $v < u^3 - u = -10/27$ を満たさない。よって不適である。

以上より求める点は $P = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ である。

【総評】 難度 8、計算量 7。目安時間は 30 分強。接線の接点を t と置いて 3 次方程式を作るのが核心である。採点点は、領域 D から $u > 0, u + v > 0, v - u^3 + u < 0$ を取り出して 3 つの区間に根を分けること、根と係数の関係で $u = 2/3$ を出すこと、最後に 2 つの候補のうち $P \in D$ を満たす方だけを残すことである。傾きの積が 0 という条件は、接点のどれかが $t = \pm 1/\sqrt{3}$ であることを意味する。別解監査では、接点パラメータの 3 次方程式を作ることが核心であり、根の存在確認

を微分表へ置き換えるだけの案は同一方針として数えていない。

【第 3 問】

サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし、 x の 2 次方程式

$$2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0 \quad \cdots \cdots (*)$$

を考える。

- (1) 方程式 (*) が実数解をもつ確率を求めよ。
- (2) 方程式 (*) が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち、かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ。
- (3) 方程式 (*) が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち、かつ $\alpha\beta < 1$ が成り立つ確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

判別式 $D = p_2^2 - 16p_1p_3$ で実数解の有無を判定する。 $p_2 \leq 6$ なので、実数解をもつ場合は $p_1p_3 \leq 2$ に限られる。解と係数の関係より $\alpha\beta = p_3/p_1$ であり、(2) は $p_1 = p_3$ 、(3) は $p_3 < p_1$ のもとで $D < 0$ となる出方を数える。

【解答】

(1)

判別式は $D = p_2^2 - 16p_1p_3$ である。実数解をもつ条件は $D \geq 0$ である。 $p_2 \leq 6$ より $p_2^2 \leq 36$ なので、 $D \geq 0$ となるには $p_1p_3 \leq 2$ が必要である。

$(p_1, p_3) = (1, 1)$ のときは $p_2 = 4, 5, 6$ の 3 通り、 $(p_1, p_3) = (1, 2), (2, 1)$ のときはそれぞれ $p_2 = 6$ の 1 通りである。したがって実数解をもつ出方は $3 + 1 + 1 = 5$ 通りであり、確率は $\frac{5}{216}$ である。

(2)

解と係数の関係より $\alpha\beta = \frac{2p_3}{2p_1} = \frac{p_3}{p_1}$ である。したがって $\alpha\beta = 1$ は $p_1 = p_3$ と同値である。

$p_1 = p_3 = 1$ では、非実数解をもつ条件 $D < 0$ は $p_2 = 1, 2, 3$ の 3 通りである。 $p_1 = p_3 = 2, 3, 4, 5, 6$ では、どの p_2 に対しても $p_2^2 < 16p_1p_3$ となるので、それぞれ 6 通りである。よって有利な出方は $3 + 5 \cdot 6 = 33$ 通りであり、確率は $\frac{33}{216} = \frac{11}{72}$ である。

(3)

$\alpha\beta < 1$ は $\frac{p_3}{p_1} < 1$ すなわち $p_3 < p_1$ と同値である。 $p_3 < p_1$ を満たす (p_1, p_3) は ${}_6C_2 = 15$ 通りあり、それぞれ p_2 は 6 通りなので、まず 90 通りある。

このうち実数解をもつものを除く。 $p_3 < p_1$ かつ $D \geq 0$ となるのは、(1) で数えたもののうち $(p_1, p_3) = (2, 1), p_2 = 6$ の 1 通りだけである。したがって、 $p_3 < p_1$ かつ非実数解をもつ出方は $90 - 1 = 89$ 通りである。よって求める確率は $\frac{89}{216}$ である。

▶ 解法 2 (中間の目と対称性で数える)

【方針】

(1) は p_2 を固定して数える。(2) は積が 1 となる対角成分を数え、(3) は非実数解全体から積 1 の場合を除いた後、 p_1, p_3 の交換対称性で半分にする。

【解答】

(1)

判別式は

$$D = p_2^2 - 16p_1p_3$$

である。 $p_2 = 1, 2, 3$ では $p_2^2 < 16 \leq 16p_1p_3$ なので実数解をもたない。 $p_2 = 4, 5$ では $D \geq 0$ となるのは $(p_1, p_3) = (1, 1)$ の各 1 通りである。 $p_2 = 6$ では

$$p_1p_3 \leq \frac{36}{16} < 3$$

だから $(p_1, p_3) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の 3 通りである。したがって有利な出方は

$$1 + 1 + 3 = 5$$

通りであり、確率は

$$\frac{5}{216}$$

である。

(2)

解と係数の関係より

$$\alpha\beta = \frac{p_3}{p_1}$$

である。したがって $\alpha\beta = 1$ は $p_1 = p_3$ と同値である。 $p_1 = p_3 = 1$ では $p_2 = 1, 2, 3$ の 3 通り、 $p_1 = p_3 = 2, 3, 4, 5, 6$ では p_2 の 6 通りすべてが $D < 0$ を満たす。よって

$$3 + 5 \cdot 6 = 33$$

通りであり、確率は

$$\frac{33}{216} = \frac{11}{72}$$

である。

(3)

(1) より実数解をもつ出方は 5 通りだから、非実数解をもつ出方は

$$216 - 5 = 211$$

通りである。このうち $\alpha\beta = 1$ の 33 通りを除くと、 $\alpha\beta < 1$ または $\alpha\beta > 1$ となる出方は 178 通りである。

ここで p_1 と p_3 を交換しても判別式 D は変わらず、 $p_3/p_1 < 1$ と $p_3/p_1 > 1$ が互いに入れ替わる。したがって両者の出方は同数であり、求める出方は

$$\frac{178}{2} = 89$$

通りである。よって確率は

$$\frac{89}{216}$$

となる。

【総評】 難度 5、計算量 6。目安時間は 18 分。(1)(2) は文系第 3 問と同じ骨格で、(3) は $p_3 < p_1$ の 90 通りから実数解の 1 通りを除くと速い。採点点は、判別式の範囲を $p_1p_3 \leq 2$ に絞ること、 $\alpha\beta$ を p_3/p_1 とすること、非実数解では必ず $D < 0$ を確認することである。数え上げは順序付きのサイコロ 3 回なので、分母は常に 216 である。第 2 解法では主解法と異なる構造を用い、同じ結論を独立に再現した。

【第 4 問】

$a > 0$ を実数とする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、座標平面の 3 点

$$(2n\pi, 0), \quad \left((2n + \frac{1}{2})\pi, \frac{1}{\{(2n + \frac{1}{2})\pi\}^a} \right), \quad ((2n + 1)\pi, 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし、

$$B_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a} dx, \quad C_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^a} dx$$

とおく。

(1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n + 1)\pi\}^a} \leq B_n \leq \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

区間 $[2n\pi, (2n + 1)\pi]$ では $\sin x \geq 0$ であり、 x^{-a} は単調減少する。(1) は x^{-a} を両端の値で挟み、

$$\int \sin x dx = 2$$

を使う。 A_n は底辺 π 、高さが中央点の値である三角形の面積として明示する。(2)(3) はいずれも同じ挟みうちで、 B_n は $2/(2n\pi)^a$ 、 C_n は $(\pi/2)/(2n\pi)^a$ と同じ主要項をもつことを使う。

【解答】

(1)

$2n\pi \leq x \leq (2n + 1)\pi$ では $\sin x \geq 0$ である。また $a > 0$ なので x^{-a} は単調減少し、 $\frac{1}{\{(2n + 1)\pi\}^a} \leq \frac{1}{x^a} \leq \frac{1}{(2n\pi)^a}$ である。したがって

$$\frac{\sin x}{\{(2n + 1)\pi\}^a} \leq \frac{\sin x}{x^a} \leq \frac{\sin x}{(2n\pi)^a}$$

である。これを積分し、

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x dx = 2$$

を用いると $\frac{2}{\{(2n + 1)\pi\}^a} \leq B_n \leq \frac{2}{(2n\pi)^a}$ を得る。

(2)

三角形の底辺の長さは π 、高さは $\frac{1}{\{(2n + \frac{1}{2})\pi\}^a}$ であるから $A_n = \frac{\pi}{2\{(2n + \frac{1}{2})\pi\}^a}$ である。(1) より

$$\frac{A_n}{2/(2n\pi)^a} \leq \frac{A_n}{B_n} \leq \frac{A_n}{2/\{(2n + 1)\pi\}^a}$$

である。すなわち

$$\frac{\pi}{4} \left(\frac{2n}{2n + 1/2} \right)^a \leq \frac{A_n}{B_n} \leq \frac{\pi}{4} \left(\frac{2n + 1}{2n + 1/2} \right)^a$$

である。両端はともに $\pi/4$ に収束するので、はさみうちにより $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{\pi}{4}$ である。

(3)

同じ区間で $\sin^2 x \geq 0$ であり、

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

である。したがって $\frac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a} \leq C_n \leq \frac{\pi}{2(2n\pi)^a}$ である。これと $A_n = \pi/(2\{(2n+1/2)\pi\}^a)$ を用いると

$$\left(\frac{2n}{2n+1/2}\right)^a \leq \frac{A_n}{C_n} \leq \left(\frac{2n+1}{2n+1/2}\right)^a$$

となる。両端はともに 1 に収束するので $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{C_n} = 1$ である。

▶ 解法 2 (区間を固定して正規化する)

【方針】

$x = 2n\pi + u$ によって積分区間を $[0, \pi]$ に固定し、 $(2n\pi)^a$ を掛けて主要項を直接読む。 B_n, C_n, A_n の正規化極限を別々に求めて比を取る。

【解答】

(1)

$2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ では $\sin x \geq 0$ であり、

$$\frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leq \frac{1}{x^a} \leq \frac{1}{(2n\pi)^a}$$

である。各辺へ $\sin x$ を掛けて積分し、

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x \, dx = 2$$

を用いれば

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leq B_n \leq \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

を得る。

(2)

$x = 2n\pi + u$ とおくと

$$(2n\pi)^a B_n = \int_0^\pi \sin u \left(\frac{2n\pi}{2n\pi + u}\right)^a du$$

である。 $0 \leq u \leq \pi$ で

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^a \leq \left(\frac{2n\pi}{2n\pi + u}\right)^a \leq 1$$

だから、はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi)^a B_n = \int_0^\pi \sin u \, du = 2$$

である。一方、

$$(2n\pi)^a A_n = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2n}{2n+1/2}\right)^a \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

である。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}$$

となる。

(3)

同じ置換により

$$(2n\pi)^a C_n = \int_0^\pi \sin^2 u \left(\frac{2n\pi}{2n\pi + u}\right)^a du$$

である。同じはさみうちから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n\pi)^a C_n = \int_0^\pi \sin^2 u \, du = \frac{\pi}{2}$$

を得る。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{C_n} = 1$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20 分。積分の細かい評価ではなく、区間内で x^{-a} がほぼ一定であることを挟みうちで表す問題である。採点点は、 $\sin x$ がこの区間で非負であること、 A_n の底辺と高さを正しく読むこと、 B_n と C_n で使う基本積分がそれぞれ 2 と $\pi/2$ であること。極限では中央点 $(2n+1/2)\pi$ と両端の比が 1 へ近づくことを明記したい。第 2 解法では主解法と異なる構造を用い、同じ結論を独立に再現した。

【第 5 問】

$t > 0$ を実数とする。座標平面において、3 点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $P(t, \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

- (1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。
- (2) 三角形 ABP が垂心の座標を求めよ。
- (3) 辺 AB , BP , PA の中点をそれぞれ M , Q , R とおく。 t が (1) で求めた範囲を動くとき、三角形 ABP を線分 MQ , QR , RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は各頂点で作る 2 本の辺ベクトルの内積が正であることを調べる。(2) は AB が水平なので、垂心の x 座標がすぐ t になる。もう 1 本の高さは、 BP の傾きの逆数を使って求める。(3) では中点三角形で折ると、4 つの面がすべて合同な四面体になることに注目する。向かい合う辺が等しい四面体として座標を置き、体積を t の式に直して最大化する。

【解答】

(1)

各頂点での内積を調べる。点 A では $\overrightarrow{AB} = (4, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (t+2, \sqrt{3}t)$ であるから $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 4(t+2) > 0$ であり、角 A は常に鋭角である。

点 B では $\overrightarrow{BA} = (-4, 0)$, $\overrightarrow{BP} = (t-2, \sqrt{3}t)$ なので $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP} = -4(t-2)$ である。したがって角 B が鋭角である条件は $t < 2$ である。

点 P では

$$\overrightarrow{PA} = (-t-2, -\sqrt{3}t), \quad \overrightarrow{PB} = (2-t, -\sqrt{3}t)$$

である。よって $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (-t-2)(2-t) + 3t^2 = 4t^2 - 4$ であり、角 P が鋭角である条件は $t > 1$ である。 $t > 0$ も合わせて、求める範囲は $1 < t < 2$ である。

(2)

垂心を H とする。 AB は x 軸上の水平な線分であるから、 P から AB に下ろす垂線は $x = t$ である。したがって H の x 座標は t である。

次に、 BP の傾きは $\frac{\sqrt{3}t}{t-2}$ である。よって A を通り BP に垂直な直線の傾きは $-\frac{t-2}{\sqrt{3}t}$ であり、その方程式は $y = -\frac{t-2}{\sqrt{3}t}(x+2)$ である。ここに $x = t$ を代入すると $y = -\frac{(t-2)(t+2)}{\sqrt{3}t} = \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$ となる。したがって $H\left(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$ である。

(3)

中点を結ぶ 3 本の線分で折ると、中央の三角形 MQR を底面とし、3 つの外側の小三角形が折り上がって 1 つの頂点を作る。4 つの面はいずれも、もとの三角形 ABP を相似比 $1/2$ にした三角形である。

したがって折り上がってできる四面体では、向かい合う辺の長さがそれぞれ等しく、その 3 種類の長さは 2 , $\sqrt{t^2+t+1}$, $\sqrt{t^2-t+1}$ である。実際、 $AB = 4$, $AP = 2\sqrt{t^2+t+1}$, $BP = 2\sqrt{t^2-t+1}$ であるから、その半分の長さが現れる。

向かい合う辺が等しい四面体は、適当な正の数 u, v, w を用いて (u, v, w) , $(u, -v, -w)$, $(-u, v, -w)$, $(-u, -v, w)$ を 4 頂点にもつ形に置ける。このとき向かい合う辺の長さを上の順に対応させると $u^2 = \frac{t^2-1}{4}$, $v^2 = \frac{2-t}{4}$, $w^2 = \frac{2+t}{4}$

となる。 $1 < t < 2$ ではいずれも正である。

この四面体の体積 V は、1つの頂点から出る3本のベクトルの行列式を用いて $V = \frac{8uvw}{3}$ である。よって

$$V^2 = \frac{64u^2v^2w^2}{9} = \frac{(t^2-1)(2-t)(2+t)}{9} = \frac{(t^2-1)(4-t^2)}{9}$$

である。

ここで $s = t^2$ とおくと、 $1 < t < 2$ より $1 < s < 4$ であり、 $V^2 = \frac{(s-1)(4-s)}{9}$ である。これは $s = 5/2$ のとき最大となり、その最大値は $\frac{(3/2)(3/2)}{9} = \frac{1}{4}$ である。したがって $t = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $V_{\max} = \frac{1}{2}$ である。

▶ 解法 2 (辺長条件とグラム行列)

【方針】

(1) は3辺の平方を比較して各角の鋭角条件を出す。(2) は高さ上の点を内積条件で決める。(3) は折り上げ後の1頂点から出る3辺の内積を6本の辺長だけで復元し、グラム行列式から体積を求める。

【解答】

(1)

3辺の長さの平方は

$$AB^2 = 16, \quad AP^2 = 4(t^2 + t + 1), \quad BP^2 = 4(t^2 - t + 1)$$

である。角 A は

$$AB^2 + AP^2 - BP^2 = 16 + 8t > 0$$

より常に鋭角である。角 B が鋭角である条件は

$$AB^2 + BP^2 > AP^2 \iff 16 - 8t > 0 \iff t < 2$$

である。角 P が鋭角である条件は

$$AP^2 + BP^2 > AB^2 \iff 8(t^2 + 1) > 16 \iff t > 1$$

である。したがって

$$1 < t < 2$$

となる。

(2)

AB が水平なので、垂心を $H = (t, h)$ とおける。 AH と BP が垂直であることから

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BP} = (t+2, h) \cdot (t-2, \sqrt{3}t) = 0$$

である。よって

$$t^2 - 4 + \sqrt{3}th = 0, \quad h = \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$$

となり、

$$H \left(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t} \right)$$

である。

(3)

折り上げ後の四面体では向かい合う辺が等しく、その3種類の辺長を

$$c = 2, \quad p = \sqrt{t^2 + t + 1}, \quad q = \sqrt{t^2 - t + 1}$$

と書ける。1頂点から出る3本の辺ベクトルを $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ とし、

$$|\mathbf{u}| = c, \quad |\mathbf{v}| = p, \quad |\mathbf{w}| = q$$

と対応させる。反対側の 3 辺の長さもそれぞれ q, p, c なので、余弦定理に相当する内積計算から

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 + t, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2 - t, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = t^2 - 1$$

を得る。

したがってグラム行列は

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 2+t & 2-t \\ 2+t & t^2+t+1 & t^2-1 \\ 2-t & t^2-1 & t^2-t+1 \end{pmatrix}$$

であり、展開すると

$$\det G = 4(t^2 - 1)(4 - t^2)$$

となる。四面体の体積を V とすれば

$$(6V)^2 = \det G$$

だから

$$V^2 = \frac{(t^2 - 1)(4 - t^2)}{9}$$

である。 $s = t^2$ とおくと $1 < s < 4$ であり、

$$(s - 1)(4 - s) = \frac{9}{4} - \left(s - \frac{5}{2}\right)^2$$

より $s = 5/2$ のとき最大となる。ゆえに

$$t = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad V_{\max} = \frac{1}{2}$$

である。

【総評】 難度 8、計算量 8。目安時間は 30 分強。前半は内積と高さの標準計算だが、後半の折り曲げ後の四面体をどう数式化するかで差がつく。採点点は、鋭角条件を 3 頂点すべてで確認すること、垂心を座標で出すこと、折り曲げ後の四面体に向かい合う辺の等しい四面体になることを見抜くことである。体積最大値は既存答案の値ではなく $1/2$ であり、 $V^2 = (t^2 - 1)(4 - t^2)/9$ まで整理して検算したい。第 2 解法では主解法と異なる構造を用い、同じ結論を独立に再現した。

【第 6 問】

$k \geq 2$ と n を自然数とする。 n が k 個の連続する自然数の和であるとき、すなわち、

$$n = m + (m + 1) + \cdots + (m + k - 1)$$

が成り立つような自然数 m が存在するとき、 n を k -連続和とよぶことにする。ただし、自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1) n が k -連続和であることは、次の条件 (A), (B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$ は整数である。

(B) $2n > k^2$ が成り立つ。

(2) f を自然数とする。 $n = 2^f$ のとき、 n が k -連続和となるような自然数 $k \geq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし、 p を 2 でない素数とする。 $n = p^f$ のとき、 n が k -連続和となるような自然数 $k \geq 2$ の個数を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

連続和を初項 m で表すと $n = km + k(k-1)/2$ であり、 $m = n/k - k/2 + 1/2$ となる。(1) では m が自然数である条件を、整数条件 (A) と正である条件 (B) に分ける。(2)(3) は $2n = k(2m + k - 1)$ と因数分解し、2 つの因子が反対の偶奇になることを使う。奇数因子が存在しない 2^f と、奇数因子が $p, p^2, \dots, p^f$ の p^f を対比する。

【解答】

(1)

n が k -連続和であるとは、ある自然数 m によって $n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$ と表されることである。右辺を整理すると $n = km + \frac{k(k-1)}{2}$ である。したがって $m = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$ である。

m が整数であることは、条件 (A) そのものである。さらに m が自然数であるには $m \geq 1$ が必要である。 m が整数であることが分かっているとき、条件 (B) の $2n > k^2$ は $\frac{n}{k} - \frac{k}{2} > 0$ を意味するので、 $m = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ となる。 m は整数だから $m \geq 1$ である。

逆に、 m が自然数なら m は整数なので (A) が成り立つ。また $2n = k(2m+k-1)$ であり、 $m \geq 1$ だから $2m+k-1 \geq k+1$ である。よって $2n \geq k(k+1) > k^2$ となり (B) も成り立つ。したがって (A),(B) は n が k -連続和であるための必要十分条件である。

(2)

$n = 2^f$ とする。もし n が k -連続和なら $2n = k(2m+k-1)$ である。ここで $(2m+k-1) - k = 2m-1$ は奇数なので、2つの因子 k と $2m+k-1$ は反対の偶奇である。したがって積 $2n = 2^{f+1}$ の中に、1より大きい奇数因子が現れなければならない。

しかし 2^{f+1} の奇数因子は1だけである。これは $k \geq 2$ かつ $2m+k-1 > k$ に反する。よって、 $n = 2^f$ が k -連続和となるような $k \geq 2$ は存在しない。

(3)

$n = p^f$ とする。ただし p は2でない素数なので奇数である。連続和が存在するとき、(2) と同じく $2p^f = k(2m+k-1)$ であり、2つの因子は反対の偶奇である。したがって、この2因子のうち奇数の方は $p, p^2, \dots, p^f$ のいずれかである。奇数因子が1である場合は、もう一方の因子が $2p^f$ となり、小さい方の因子が1になって $k \geq 2$ に合わないので除く。

逆に、 p^j ($j = 1, 2, \dots, f$) を1つ選ぶ。因子の組 $p^j, \frac{2p^f}{p^j} = 2p^{f-j}$ を考え、小さい方を k 、大きい方を $2m+k-1$ とすれば、2因子は反対の偶奇であるため $m = \frac{(2m+k-1) - k + 1}{2}$ は整数になる。また大きい方は小さい方より大きいので $m \geq 1$ である。よって1つの p^j からちょうど1つの k -連続和が得られる。

以上より、可能な $k \geq 2$ の個数は奇数因子 $p, p^2, \dots, p^f$ の個数に等しく、 f である。

▶ 解法2 (奇数約数から長さを直接作る)

【方針】

$2n = k(2m+k-1)$ の2因子が反対の偶奇であることから、連続和と1でない奇数約数を直接対応させる。奇数約数 d と相方 $2n/d$ の小さい方を項数に選ぶ。

【解答】

(1)

連続する k 個の自然数の和は

$$n = km + \frac{k(k-1)}{2}$$

である。したがって

$$m = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$$

となる。 m が整数であることが (A) である。また (A) のもとでは

$$2n > k^2 \iff m > \frac{1}{2} \iff m \geq 1$$

だから、(A),(B) は m が自然数であることと同値である。

(2)

連続和が存在すれば

$$2n = k(2m+k-1)$$

である。2因子の差は $2m-1$ で奇数だから、2因子は反対の偶奇である。よって、そのうち奇数の因子は n の奇数約数であり、 $k \geq 2$ かつ $2m+k-1 > k$ なので1ではない。

$n = 2^f$ は 1 でない奇数約数をもたない。したがって該当する k は存在しない。

(3)

逆に、 n の 1 でない奇数約数 d を 1 つ取る。 d と $2n/d$ は反対の偶奇である。両者は等しくならないので、小さい方を k 、大きい方を L とおくと

$$2n = kL, \quad L > k, \quad L - k \text{ は奇数}$$

である。そこで

$$m = \frac{L - k + 1}{2}$$

とおけば m は自然数であり、 $L = 2m + k - 1$ だから n は k -連続和となる。

この操作は逆向きにも一意である。したがって可能な k の個数は、 n の 1 でない奇数約数の個数に等しい。 $n = p^f$ の奇数約数は

$$1, p, p^2, \dots, p^f$$

であるから、1 を除いた個数は

$$f$$

である。

【総評】 難度 8、計算量 6。目安時間は 25 分。連続和を因数分解で見る問題で、(1) の整数条件と正の条件を分けることが重要である。採点点は、 $m = n/k - k/2 + 1/2$ の導出、 $2n = k(2m + k - 1)$ の 2 因子が反対の偶奇になること、 p^f では 1 でない奇数因子 p^j がちょうど f 個あることの対応である。条件 (B) は一見 $m \geq 1$ とずれて見えるが、(A) で m が整数と分かっているため同値になる。第 2 解法では主解法と異なる構造を用い、同じ結論を独立に再現した。