

東北大学 2016 年度 文系

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

平面上で原点 O と 3 点 $A(3, 1)$, $B(1, 2)$, $C(-1, 1)$ を考える。実数 s, t に対し、点 P を

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) s, t が条件

$$-1 \leq s \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad -1 \leq s + t \leq 1$$

を満たすとき、点 $P(x, y)$ の存在する範囲 D を図示せよ。

(2) 点 P が (1) で求めた範囲 D を動くとき、内積 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$ の最大値を求め、そのときの P の座標を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

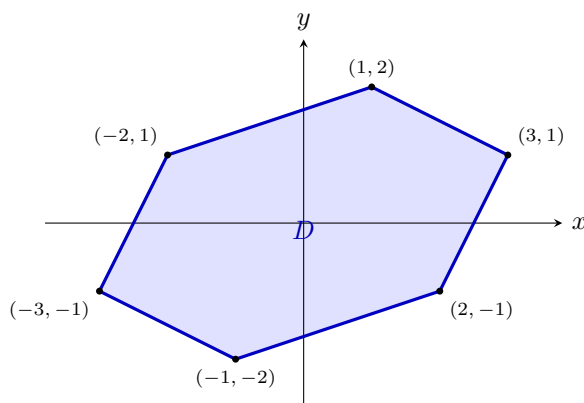
(s, t) の条件は st 平面の六角形を表すので、まずその頂点を求める。点 P への対応 $(s, t) \mapsto (3s + t, s + 2t)$ は線形変換であり、領域の頂点は頂点に移る。(2) では $\overrightarrow{OC} = (-1, 1)$ を使って内積を $-2s + t$ という一次式に直し、六角形の頂点で最大値を比較する。

【解答】

(1) $\overrightarrow{OA} = (3, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 2)$ なので $P = (x, y) = (3s + t, s + 2t)$ である。この線形変換の行列式は $3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5 \neq 0$ だから、六角形の各辺と頂点はつぶれずに移る。

まず (s, t) の範囲を調べる。条件 $-1 \leq s \leq 1$, $-1 \leq t \leq 1$, $-1 \leq s + t \leq 1$ は、 st 平面で 6 本の直線に囲まれた六角形を表す。その頂点は、隣り合う境界線の交点から $(1, 0), (1, -1), (0, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 1)$ である。

これらを $(x, y) = (3s + t, s + 2t)$ で移すと、順に $(3, 1), (2, -1), (-1, -2), (-3, -1), (-2, 1), (1, 2)$ となる。したがって D はこれら 6 点をこの順に結んだ六角形である。



(2) $\overrightarrow{OC} = (-1, 1)$ だから

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = (3s + t, s + 2t) \cdot (-1, 1) = -3s - t + s + 2t = -2s + t$$

である。これは (s, t) について一次式なので、最大値は (1) で得た六角形の頂点で生じる。

各頂点での値は

(s, t)	$-2s + t$
$(1, 0)$	-2
$(1, -1)$	-3
$(0, -1)$	-1
$(-1, 0)$	2
$(-1, 1)$	3
$(0, 1)$	1

である。よって最大値は 3 であり，そのとき $(s, t) = (-1, 1)$ である。このとき $P = (3(-1) + 1, -1 + 2) = (-2, 1)$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は (s, t) 平面の 6 つの頂点を線形写像 $P = (3s + t, s + 2t)$ で移す。(2) では頂点を総当たりせず，目的式 $-2s + t$ を，条件から直ちに上から抑える。等号候補 $(s, t) = (-1, 1)$ が残りの条件も満たすことを確認して最大値と点 P を決める。

【解答】

(1) 条件

$$-1 \leq s \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad -1 \leq s + t \leq 1$$

が表す六角形の頂点は

$$(1, 0), (1, -1), (0, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 1)$$

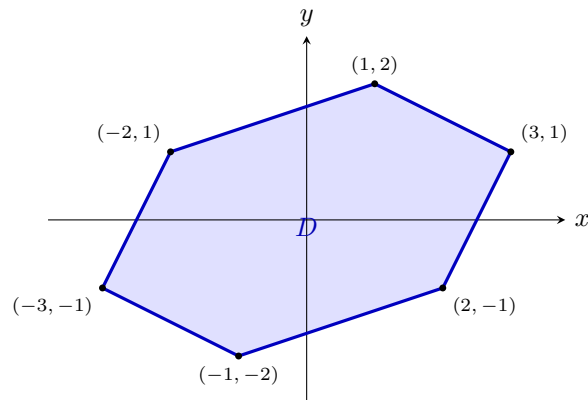
である。一方，

$$P = (3s + t, s + 2t)$$

であり，変換の行列式は $5 \neq 0$ なので辺や頂点はつぶれない。これらの像は順に

$$(3, 1), (2, -1), (-1, -2), (-3, -1), (-2, 1), (1, 2)$$

となる。したがって D はこの 6 点を順に結ぶ六角形である。



(2) $\vec{OC} = (-1, 1)$ より

$$\vec{OP} \cdot \vec{OC} = (3s + t, s + 2t) \cdot (-1, 1) = -2s + t$$

である。条件 $s \geq -1, t \leq 1$ から

$$-2s + t \leq 2 + 1 = 3$$

を得る。等号が成り立つには $s = -1, t = 1$ であればよく，この組は

$$-1 \leq s + t = 0 \leq 1$$

も満たす。したがって最大値は 3 である。そのとき

$$P = (3(-1) + 1, -1 + 2) = (-2, 1)$$

となる。

【総評】 難度 4, 計算量 4。目安時間は 20 分。(1) では (s, t) の六角形の頂点を循環順に並べ, 線形写像で得た 6 点も同じ順に結ぶことが最低限の得点条件になる。(2) は頂点比較でも解けるが, $-2s + t \leq 2 + 1$ と一行で抑え, 等号点が $s + t$ の条件を満たすと確認できれば簡潔で強い答案になる。最大値だけで終えず, そのときの (s, t) と $P = (-2, 1)$ まで記すことが完答の採点点である。

【第 2 問】

放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = -2|x| + k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ。
- (2) a, b を実数とする。関数 $y = -2|x - a| + b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 (a, b) 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ。
- (3) (2) で求めた領域 D の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $u = |x|$ として放物線との交点条件を 1 変数の最大値に直す。(2) は折れ線の右半直線 $x \geq a$ と左半直線 $x \leq a$ を分け, それぞれが放物線と 2 点で交わる条件を, 判別式と 2 解が正しい側にある条件で求める。4 個の共有点にするには, 頂点で接する場合や片側で 1 点になる端点を除く必要がある。(3) は $-2 < a < 2$ で上下差 $2 - 2|a| + a^2/2$ を積分する。

【解答】

(1) $u = |x|$ とおくと $u \geq 0$ であり, 共有点では

$$k = 2u - \frac{1}{2}u^2 = 2 - \frac{1}{2}(u - 2)^2.$$

右辺の値域は $(-\infty, 2]$ だから, 共有点をもつための必要十分条件は $k \leq 2$ である。

(2) 折れ線の頂点 $x = a$ は左右の枝に共通する。全体で相異なる 4 共有点をもつには, 右枝に $x > a$ の 2 根, 左枝に $x < a$ の 2 根があることが必要十分である。

右半直線は $x \geq a$ で $y = -2x + 2a + b$ であり, 交点の x 座標は

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - 4a - 2b}.$$

2 根がとも a より大きい条件は

$$4 - 4a - 2b > 0, \quad 2 - \sqrt{4 - 4a - 2b} > a,$$

すなわち

$$a < 2, \quad -\frac{a^2}{2} < b < 2 - 2a$$

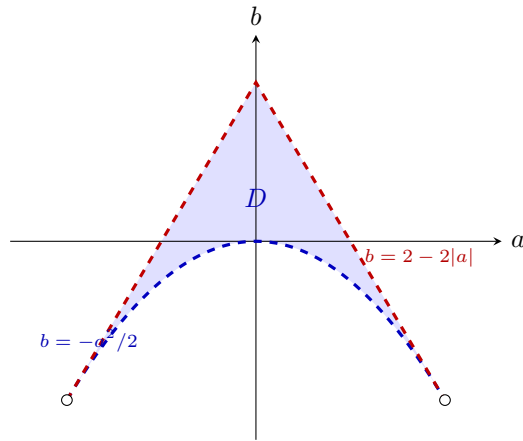
である。同様に左半直線の 2 根がとも a より小さい条件は

$$a > -2, \quad -\frac{a^2}{2} < b < 2 + 2a$$

である。したがって

$$-2 < a < 2, \quad -\frac{a^2}{2} < b < 2 - 2|a|.$$

これが求める領域 D であり, 境界では接触または共有点の重複が起こるため境界は含まない。



(3) 領域は b 軸対称であるから、面積 S は

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 \left\{ (2 - 2a) - \left(-\frac{a^2}{2} \right) \right\} da \\ &= 2 \int_0^2 \left(2 - 2a + \frac{a^2}{2} \right) da \\ &= 2 \left[2a - a^2 + \frac{a^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2

【方針】

折れ線の各半直線と放物線との差を、頂点が $x = 2$ または $x = -2$ にある上に凸の 2 次関数として見る。4 共有点に必要な、右枝で $x > a$ の 2 根、左枝で $x < a$ の 2 根という条件を、折れ線の頂点と差の頂点での符号変化に翻訳する。最後は領域を実際に図示し、対称性を用いて面積を積分する。

【解答】

(1) $u = |x| \geq 0$ とおく。共有点では

$$k = 2u - \frac{1}{2}u^2 = 2 - \frac{1}{2}(u - 2)^2$$

である。右辺の値域は $(-\infty, 2]$ だから、共有点をもつための必要十分条件は $k \leq 2$ である。

(2) 頂点 $x = a$ は左右の枝に共通するため、全体で相異なる 4 共有点をもつには、右枝に $x > a$ の 2 根、左枝に $x < a$ の 2 根が必要十分である。右枝について

$$F_+(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 2a - b = 2 - 2a - b - \frac{(x - 2)^2}{2}$$

とおく。 $x > a$ に相異なる 2 零点をもつ条件は、 $a < 2$ かつ

$$F_+(a) < 0 < F_+(2)$$

である。実際、 F_+ は $[a, 2]$ で増加し、 $[2, \infty)$ で減少するので、零点が $(a, 2)$ と $(2, \infty)$ に 1 つずつある。整理すると

$$a < 2, \quad -\frac{a^2}{2} < b < 2 - 2a.$$

同様に左枝では

$$F_-(x) = 2 + 2a - b - \frac{(x + 2)^2}{2}$$

を考え、 $x < a$ に 2 零点をもつ条件は

$$a > -2, \quad F_-(a) < 0 < F_-(-2),$$

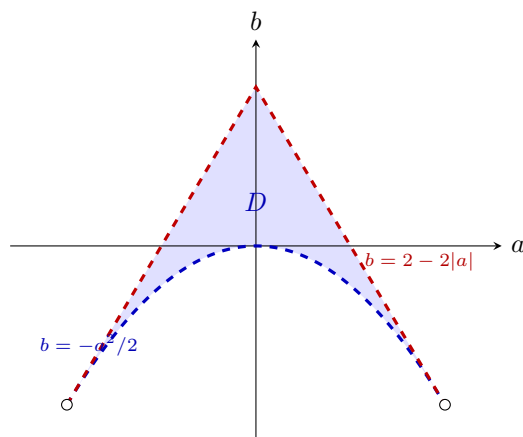
すなわち

$$a > -2, \quad -\frac{a^2}{2} < b < 2 + 2a.$$

以上から

$$-2 < a < 2, \quad -\frac{a^2}{2} < b < 2 - 2|a|$$

を得る。境界は 4 共有点にならないので含まない。



(3) 領域は b 軸対称であるから

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 \left(2 - 2a + \frac{a^2}{2} \right) da \\ &= 2 \left[2a - a^2 + \frac{a^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7, 計算量 7. 目安時間は 32 分。完答の核心は, 判別式が正というだけでなく, 右側の 2 根がとも $x > a$, 左側の 2 根がとも $x < a$ にあることまで保証する点である。解法 1 では小さい根・大きい根を境界 a と比較し, 解法 2 では差の単調性と 3 点の符号で同じ条件を確認する。境界では接触や頂点での重複が起こるため不等号はすべて厳密である。最後は上端 $2 - 2|a|$, 下端 $-a^2/2$ を明示してから積分すると採点者にも領域が伝わる。

【第 3 問】

ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている。出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ, ネジが全部で 54 個あった。残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として, 可能性のある組 (l, m, n) をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

部品数は負でない整数なので, まず方程式 $7l + 9m + 12n = 54$ を立てる。係数のうち 9, 12, 54 が 3 の倍数であることから, l が 3 の倍数に限られることを使って候補を絞る。あとは $l = 0, 3, 6$ について一次方程式を解き, m, n が負でない整数になるものだけを残す。

【解答】

残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n とすると, ネジの総数は $7l + 9m + 12n = 54$ である。ここで $9m, 12n, 54$ はいずれも 3 の倍数なので $7l \equiv 0 \pmod{3}$ である。 $7 \equiv 1 \pmod{3}$ だから $l \equiv 0 \pmod{3}$ である。

また $7l \leq 54$ より $l \leq 7$ である。したがって $l = 0, 3, 6$ だけを調べればよい。 $l = 0$ のとき $9m + 12n = 54$ すなわち $3m + 4n = 18$ である。 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ を調べると, m が整数になるのは $(n, m) = (0, 6), (3, 2)$ である。 $l = 3$ のとき $9m + 12n = 33$ すなわち $3m + 4n = 11$ である。これを満たす負でない整数解は $(n, m) = (2, 1)$ である。 $l = 6$ のとき $9m + 12n = 12$ すなわち $3m + 4n = 4$ である。これを満たす負でない整数解は $(n, m) = (1, 0)$ である。

以上より, 求める組は $(l, m, n) = (0, 6, 0), (0, 2, 3), (3, 1, 2), (6, 0, 1)$ である。

▶ 解法 2

【方針】

n を 0 から 4 まで固定し, $7l + 9m = 54 - 12n$ を解く。法 9 で l の合同類を一意に定め, さらに $0 \leq l \leq (54 - 12n)/7 < 9$ を使うと, 各 n について候補は高々 1 個になる。表で全候補を確認して漏れを防ぐ。

【解答】

ネジの総数から

$$7l + 9m + 12n = 54$$

であり, l, m, n は負でない整数である。 $12n \leq 54$ より

$$n = 0, 1, 2, 3, 4$$

だけを調べればよい。 $N = 54 - 12n$ とおくと

$$7l + 9m = N.$$

法 9 で考えると $7l \equiv N \pmod{9}$ であり, $7 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{9}$ だから

$$l \equiv 4N \pmod{9}$$

となる。また $0 \leq l \leq N/7 < 9$ なので, 各 n で候補となる l は高々 1 つである。

n	N	l	m
0	54	0	6
1	42	6	0
2	30	3	1
3	18	0	2
4	6	候補なし	候補なし

したがって求める組は

$$(l, m, n) = (0, 6, 0), (6, 0, 1), (3, 1, 2), (0, 2, 3)$$

である。

【総評】 難度 3, 計算量 3。目安時間は 10 分。立式 $7l + 9m + 12n = 54$ が最低限の得点点で, その後は一つの変数を合同式で絞ると漏れなく短く処理できる。解法 1 は法 3 で $l = 0, 3, 6$ に絞り, 解法 2 は法 9 で各 n に対する l を高々 1 個にする。易しい整数問題ほど, 非負条件と上限を先に書き, 最後に 4 組を元の式へ代入して検算することが取りこぼし防止になる。

■ 【第 4 問】 ■

鋭角三角形 $\triangle ABC$ において, 頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 四角形 $BCEF$ と $AFHE$ が円に内接することを示せ。
- (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は垂線からできる直角を同一円周上の条件に結びつける。特に, 2 点 E, F から同じ線分 BC を直角に見ること, 2 点 E, F から同じ線分 AH を直角に見ることを使う。(2) は D を原点, BC を x 軸, AD を y 軸にとり, 垂線の足 E, F を直線の交点として求める。直線 DE, DF の傾きが互いに反対になることを示せば, AD を対称軸として $\angle ADE = \angle ADF$ が従う。

【解答】

(1) $BE \perp AC$ で, E は AC 上にあるから $\angle BEC = 90^\circ$ である。また $CF \perp AB$ で, F は AB 上にあるから $\angle BFC = 90^\circ$ である。したがって E, F はいずれも線分 BC を直角に見込む点である。よって $\angle BEC + \angle BFC = 180^\circ$ となり, 四角形 $BCEF$ は円に内接する。

次に、 H は垂心なので EH は BE 上にあり、 AE は AC 上にある。したがって $AE \perp EH$ であり、 $\angle AEH = 90^\circ$ である。同様に FH は CF 上、 AF は AB 上にあるから $\angle AFH = 90^\circ$ である。よって E, F はいずれも線分 AH を直角に見込む点であり、四角形 $AFHE$ も円に内接する。

(2) D を原点、 BC を x 軸、 AD を y 軸にとる。鋭角三角形なので $A = (0, h)$, $B = (-u, 0)$, $C = (v, 0)$ ($u, v, h > 0$) とおける。さらに頂点 A の角が鋭角であるから、 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = h^2 - uv > 0$ である。

まず E を求める。直線 AC の方向ベクトルは $(v, -h)$ である。 $E = A + \lambda(C - A) = (\lambda v, h(1 - \lambda))$ とおくと、 $BE \perp AC$ より $(E - B) \cdot (v, -h) = 0$ である。すなわち $(\lambda v + u)v - h^2(1 - \lambda) = 0$ だから $\lambda = \frac{h^2 - uv}{h^2 + v^2}$ である。したがって $E = \left(\frac{v(h^2 - uv)}{h^2 + v^2}, \frac{hv(u + v)}{h^2 + v^2} \right)$ となる。

同様に、直線 AB 上の点を $F = A + \mu(B - A) = (-\mu u, h(1 - \mu))$ とおく。 $CF \perp AB$ より $(F - C) \cdot (-u, -h) = 0$ であるから $\mu = \frac{h^2 - uv}{h^2 + u^2}$ を得る。よって $F = \left(\frac{u(uv - h^2)}{h^2 + u^2}, \frac{hu(u + v)}{h^2 + u^2} \right)$ である。 D は原点であるから、直線 DE の傾きは

$$\frac{\frac{hv(u + v)}{h^2 + v^2}}{\frac{v(h^2 - uv)}{h^2 + v^2}} = \frac{h(u + v)}{h^2 - uv}$$

である。また直線 DF の傾きは

$$\frac{\frac{hu(u + v)}{h^2 + u^2}}{\frac{u(uv - h^2)}{h^2 + u^2}} = -\frac{h(u + v)}{h^2 - uv}$$

である。ここで $h^2 - uv > 0$ なので、 E は AD の右側、 F は左側にある。したがって DE と DF は y 軸、すなわち AD に関して対称である。よって $\angle ADE = \angle ADF$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は直角を用いて 2 組の円を確定する。(2) ではさらに四角形 $CDHE$ と $BDHF$ も円に内接することを示し、円周角を順に移す。最後に $CH \perp AB$, $BH \perp AC$ から、移した 2 つの角がとも $90^\circ - \angle A$ であることを確認する。座標計算を使わず、垂足図形に現れる 4 つの円だけで証明を閉じる。

【解答】

(1) $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ であるから、 B, C, E, F は直径 BC の円周上にある。また $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$ であるから、 A, E, H, F は直径 AH の円周上にある。したがって四角形 $BCEF$, $AFHE$ はいずれも円に内接する。

(2) $CD \perp DH$, $CE \perp EH$ より

$$\angle CDH = \angle CEH = 90^\circ$$

であるから、四角形 $CDHE$ は円に内接する。同様に $BD \perp DH$, $BF \perp FH$ より、四角形 $BDHF$ も円に内接する。

三角形 ABC は鋭角三角形なので、垂心 H は内部にあり、 D, H, A はこの順に同一直線上にある。したがって円周角の性質から

$$\angle EDA = \angle EDH = \angle ECH, \quad \angle ADF = \angle HDF = \angle HBF$$

となる。ところが EC は AC 上、 $CH \perp AB$ であるから

$$\angle ECH = 90^\circ - \angle BAC$$

である。また BF は BA 上、 $BH \perp AC$ であるから、同じく

$$\angle HBF = 90^\circ - \angle BAC$$

である。よって $\angle EDA = \angle ADF$, すなわち $\angle ADE = \angle ADF$ が示された。

【総評】 難度 5, 計算量 4。目安時間は 25 分。(1) は「同じ線分を直角に見る点は同一円周上にある」という標準事実を、 BC と AH の 2 回に分けて使う問題である。(2) は座標なら垂足を正確に求め、鋭角条件から $h^2 - uv > 0$ まで書くことが完答の要点になる。幾何解法では $CDHE$, $BDHF$ という追加の円を発見できるかが差になる。最低限、利用する円周角がどの弦を見込むかを一つずつ明記し、最後に両角が $90^\circ - \angle A$ へ一致する流れを答案上で閉じたい。