

# 入 学 試 験 問 題

## 数 学



東 北 大 学 2016 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

## 第 1 問

平面上の点  $O$  を中心とする半径 1 の円周上に相異なる  $n$  個の点  $A_1, \dots, A_n$  があって、各  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) に対して

$$\overrightarrow{OA_j} = \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l}$$

を満たす  $k, l$  が存在するとする。このとき  $n$  は 6 の倍数であることを示せ。

## 第 2 問

あるウイルスの感染拡大について次の仮定で試算を行う。このウイルスの感染者は感染してから 1 日の潜伏期間をおいて、2 日後から毎日 2 人の未感染者にこのウイルスを感染させるとする。新たな感染者 1 人が感染源となった  $n$  日後の感染者数を  $a_n$  人とする。たとえば、1 日後は感染者は増えず  $a_1 = 1$  で、2 日後は 2 人増えて  $a_2 = 3$  となる。以下の問いに答えよ。

- (1)  $a_{n+2}$ ,  $a_{n+1}$ ,  $a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) 一般項  $a_n$  を求めよ。
- (3) 感染者数が初めて 1 万人を超えるのは何日後か求めよ。

### 第 3 問

サイコロを7個同時に1回振るとき、1から6の目がすべて出る事象をAとし、同じ目が6個以上出る事象をBとする。事象Bが起こらなかった場合に事象Aの起こる確率を求めよ。

## 第 4 問

$xy$  平面において曲線  $y = 2\sqrt{1-x^2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) と  $x$  軸との交点を  $A(1, 0)$ ,  $B(-1, 0)$  とし,  $y$  軸との交点を  $C(0, 2)$ , 原点を  $O$  とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) この曲線の第 1 象限の部分に  $A$ ,  $C$  と異なる点  $P$  を四角形  $OAPC$  の面積が最大となるようにとる。このとき,  $P$  の座標とその最大値を求めよ。
- (2) この曲線上に  $A$ ,  $B$ ,  $C$  と異なる 2 点  $E$ ,  $F$  を任意にとる。これら 5 点で作られる五角形の面積の最大値を求めよ。

## 第 5 問

$z, w$  を相異なる複素数で  $z$  の虚部は正,  $w$  の虚部は負とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)  $1, z, -1, w$  が複素数平面の同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\frac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)}$$

が負の実数となることであることを示せ。

(2)  $z = x + yi$  が  $x < 0$  と  $y > 0$  を満たすとする。 $1, z, -1, \frac{1+z^2}{2}$  が複素数平面の同一円周上にあるとき, 複素数  $z$  の軌跡を求めよ。

## 第 6 問

以下の問いに答えよ。

(1)  $n$  を正の整数として、次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

(2) 次の積分値  $I$  を最小にする実数  $a$  の値と、その最小値を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} (x^2 - a \cos 2x)^2 \, dx$$

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)