

東北大学 2016 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に相異なる n 個の点 $A_1, \dots, A_n$ があって、各 j ($j = 1, \dots, n$) に対して

$$\overrightarrow{OA_j} = \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l}$$

を満たす k, l が存在するとする。このとき n は 6 の倍数であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

各点を原点からの単位ベクトルとして見る。 $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ で 3 本すべてが単位ベクトルなら、 $|\vec{v} + \vec{w}| = 1$ から $\vec{v}$ と $\vec{w}$ のなす角が 120° と分かる。このとき $\vec{v}, \vec{w}$ は $\vec{u}$ を中心に左右 60° 回転した方向である。したがって与えられた点集合は 60° 回転で閉じており、円周上の各軌道が 6 点からなるため、点の総数は 6 の倍数になる。

【解答】

点 A_j に対応する単位ベクトルを $\vec{u} = \overrightarrow{OA_j}$ とする。仮定より、ある k, l が存在して $\vec{u} = \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l}$ である。ここで $\vec{v} = \overrightarrow{OA_k}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OA_l}$ とおくと、 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ はいずれも長さ 1 のベクトルであり $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ を満たす。

両辺の長さの 2 乗を取ると

$$1 = |\vec{u}|^2 = |\vec{v} + \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

である。したがって $\vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{1}{2}$ であり、 $\vec{v}$ と $\vec{w}$ のなす角は 120° である。

2 つの単位ベクトルの和 $\vec{v} + \vec{w}$ は、 $\vec{v}$ と $\vec{w}$ の角の二等分線方向を向く。なす角が 120° なので、 $\vec{v}$ と $\vec{w}$ は $\vec{u}$ の方向からそれぞれ 60° ずれた方向にある。つまり、 $\vec{u}$ を中心 O のまわりに 60° 回転したベクトルと、 -60° 回転したベクトルが、どちらも与えられた点集合に含まれる。

以上は任意の j について成り立つ。したがって、点集合は中心 O の 60° 回転で閉じている。

円周上の 1 点を 60° ずつ回転すると、元の点に戻るまでに 6 個の相異なる点が現れる。途中で戻ることは、 $60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ の回転で同じ点になることを意味するが、半径 1 の円周上では起こらない。よって点集合は 6 個ずつの組に分かれる。

したがって点の総数 n は 6 の倍数である。

▶ 解法 2

【方針】

円周上の各点を絶対値 1 の複素数とみなす。 $z = u + v$ を z で割り、 $U = u/z$ に対して $|U| = |1 - U| = 1$ を使うと、 U の実部が $1/2$ と決まる。したがって u, v は z を $\pm 60^\circ$ 回転した点であり、集合を 6 点の回転軌道に分解できる。

【解答】

各点の複素数表示の集合を Z とする。すべての $z \in Z$ について $|z| = 1$ であり、仮定から、ある $u, v \in Z$ が存在して

$$z = u + v$$

となる。 $z \neq 0$ なので

$$U = \frac{u}{z}, \quad V = \frac{v}{z}$$

とおけば

$$U + V = 1, \quad |U| = |V| = 1$$

である。 $V = 1 - U$ より

$$1 = |1 - U|^2 = 1 - 2\operatorname{Re} U + |U|^2 = 2 - 2\operatorname{Re} U.$$

したがって

$$\operatorname{Re} U = \frac{1}{2}.$$

$|U| = 1$ だから

$$U = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

また $V = 1 - U$ なので, U, V はこの 2 数を 1 つずつ取る。

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とおくと, u, v は $z\omega, z\bar{\omega}$ である。したがって任意の $z \in Z$ に対して $z\omega \in Z$, すなわち集合 Z は 60° 回転で閉じている。

1 点 z から

$$z, z\omega, z\omega^2, \dots, z\omega^5$$

という 6 個の相異なる点が得られ, $\omega^6 = 1$ で元へ戻る。よって Z は互いに交わらない 6 点の軌道に分かれるから, 点の総数 n は 6 の倍数である。

【総評】 難度 7, 計算量 5。目安時間は 28 分。「単位ベクトル 2 本の和が単位ベクトル」という条件から, 2 本のなす角 120° , 和の方向との差 60° を出すことが核心である。ベクトル解法でも複素数解法でも, 任意の点を $\pm 60^\circ$ 回転した点が集合内にあることを明示する。その後, 1 つの回転軌道が途中で重ならず 6 点からなると確認して初めて, 総数が 6 の倍数だと結論できる。

【第 2 問】

あるウイルスの感染拡大について次の仮定で試算を行う。このウイルスの感染者は感染してから 1 日の潜伏期間をおいて, 2 日後から毎日 2 人の未感染者にこのウイルスを感染させるとする。新たな感染者 1 人が感染源となった n 日後の感染者数を a_n 人とする。たとえば, 1 日後は感染者は増えず $a_1 = 1$ で, 2 日後は 2 人増えて $a_2 = 3$ となる。以下の問いに答えよ。

- (1) a_{n+2}, a_{n+1}, a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を求めよ。
- (3) 感染者数が初めて 1 万人を超えるのは何日後か求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

a_n は感染源となった人から始まる累計感染者数である。 $n + 2$ 日後には, $n + 1$ 日後までの感染者に加えて, n 日後までに感染していた人がそれぞれ 2 人ずつ新たに感染させるので, $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ となる。一般項は, 得られた式を帰納法で確認してもよいし, $a_{n+1} + a_n$ が 2 倍されることから導いてもよい。(3) は公式に $n = 13, 14$ を代入して, 初めて 1 万人を超える日を確認する。

【解答】

(1) $n + 1$ 日後までの感染者は a_{n+1} 人である。また, n 日後までに感染していた a_n 人が, それぞれ 2 人ずつ新たに感染させる。したがって

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(2) 初期値は $a_1 = 1, a_2 = 3$ である。 $b_n = a_{n+1} + a_n$ とおくと

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+2} + a_{n+1} \\ &= 2(a_{n+1} + a_n) = 2b_n. \end{aligned}$$

$b_1 = 4$ より $b_n = 2^{n+1}$, したがって $a_{n+1} = 2^{n+1} - a_n$ である。これを用いる帰納法で

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$$

を得る。実際, $n = 1$ で成立し, n で成立すると

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2^{n+1} - \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} \\ &= \frac{2^{n+2} + (-1)^{n+1}}{3}. \end{aligned}$$

(3) (1) と $a_n > 0$ から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2a_n > 0$$

であり, 数列は狭義単調増加する。一方

$$a_{13} = 5461 < 10000, \quad a_{14} = 10923 > 10000.$$

よって初めて 1 万人を超えるのは 14 日後である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は感染から 2 日後に初めて新たな感染を起こす人の範囲を累計数で数える。(2) は漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ の特性方程式を因数分解し, 初期値から 2 つの係数を決定する。(3) は連続する 2 項を比較して「初めて」を確認する。

【解答】

(1) $n + 2$ 日後には, $n + 1$ 日後までの感染者 a_{n+1} 人に加え, n 日後までに感染していた a_n 人がそれぞれ 2 人ずつ新たに感染させる。したがって

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(2) 特性方程式は

$$r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0.$$

よって $a_n = A2^n + B(-1)^n$ と表せる。初期値から

$$2A - B = 1, \quad 4A + B = 3$$

であり, $A = 2/3, B = 1/3$ を得る。したがって

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

(3) 漸化式と $a_n > 0$ から

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2a_n > 0$$

であり, 数列は狭義単調増加する。また

$$a_{13} = 5461 < 10000 < 10923 = a_{14}.$$

したがって感染者数が初めて 1 万人を超えるのは 14 日後である。

【総評】 難度 5, 計算量 4。目安時間は 22 分。漸化式では, $n + 2$ 日後に新規感染を起こす基準が「 n 日後までに感染済み」であることを説明し, 増分を $2a_n$ とする部分が最重要である。一般項は補助数列でも特性方程式でもよいが, 初期値 2 つを使って係数を決定する。最後は a_{13} と a_{14} の両方を示し, 「14 日後に初めて」という条件まで保証する。

【第 3 問】

サイコロを 7 個同時に 1 回振るとき、1 から 6 の目がすべて出る事象を A とし、同じ目が 6 個以上出る事象を B とする。事象 B が起こらなかった場合に事象 A の起こる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

条件付き確率 $P(A | B^c)$ として数える。 A は 6 種類の目がすべて出て、7 個のうち 1 種類だけが 2 個出る場合である。 B は 7 個すべて同じ場合と、ちょうど 6 個が同じ場合に分ける。 A と B は同時に起こらないので、分子は A の出方、分母は全出方から B の出方を引いたものになる。

【解答】

求める確率は $P(A | B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$ である。事象 A が起こると 1 から 6 の目がすべて出るので、同じ目が 6 個以上出ることはない。したがって $A \cap B^c = A$ である。

まず A の出方を数える。7 個のサイコロで 1 から 6 の目がすべて出るには、どれか 1 つの目が 2 個出て、残り 5 つの目が 1 個ずつ出ればよい。2 個出る目の選び方は 6 通りであり、7 個の位置への並べ方は $\frac{7!}{2!}$ 通りである。よって $|A| = 6 \cdot \frac{7!}{2} = 15120$ である。

次に B の出方を数える。7 個すべて同じ目である場合は 6 通りである。ちょうど 6 個が同じ目である場合は、同じ目を 6 通り、異なる 1 個の位置を 7 通り、その異なる目を残り 5 通りで選べるので $6 \cdot 7 \cdot 5 = 210$ 通りである。したがって $|B| = 6 + 210 = 216$ である。

全事象は 6^7 通りだから $|B^c| = 6^7 - 216$ である。よって求める確率は

$$\frac{|A|}{|B^c|} = \frac{15120}{6^7 - 216} = \frac{15120}{279936 - 216} = \frac{15120}{279720} = \frac{2}{37}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

分子の A は「6 種類の目がすべて少なくとも 1 回出る」と読み、包除原理で数える。分母は解法 1 と同様に、余事象 B を「7 個同じ」と「ちょうど 6 個同じ」に分けて全事象から除く。最後に $A \subset B^c$ を確認して条件付き確率へ代入する。

【解答】

事象 A が起これば 6 種類の目がすべて現れるので、6 個以上同じ目になることはない。したがって

$$A \subset B^c, \quad A \cap B^c = A.$$

A の出方を包除原理で数える。6 種類のうち少なくとも 1 種類が欠ける出方を全体から順に除くと

$$\begin{aligned} |A| &= 6^7 - {}_6C_1 5^7 + {}_6C_2 4^7 - {}_6C_3 3^7 \\ &\quad + {}_6C_4 2^7 - {}_6C_5 = 15120. \end{aligned}$$

一方、 B のうち 7 個すべて同じ目である出方は 6 通り、ちょうど 6 個が同じ目である出方は

$$6 \cdot 7 \cdot 5 = 210$$

通りである。よって

$$|B^c| = 6^7 - (6 + 210) = 279720.$$

したがって

$$P(A | B^c) = \frac{|A \cap B^c|}{|B^c|} = \frac{15120}{279720} = \frac{2}{37}.$$

【総評】 難度 4，計算量 4。目安時間は 15 分。条件付き確率の分母を B^c に固定し、 $A \subset B^c$ だから分子が $|A|$ になると説明することが最低限の論理点である。分子は重複する目を選んで $6 \cdot 7!/2!$ と数えても、包除原理で全種類が現れる並びを数えてもよい。分母では「7 個全部同じ」と「ちょうど 6 個同じ」を分け、後者の同じ目・位置・異なる目の 3 要素を落とさないことが採点上重要である。

【第 4 問】

xy 平面において曲線 $y = 2\sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$) と x 軸との交点を $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ とし, y 軸との交点を $C(0, 2)$, 原点を O とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) この曲線の第 1 象限の部分に A , C と異なる点 P を四角形 $OAPC$ の面積が最大となるようにとる。このとき, P の座標とその最大値を求めよ。
- (2) この曲線上に A , B , C と異なる 2 点 E , F を任意にとる。これら 5 点で作られる五角形の面積の最大値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は第 1 象限の点を $P = (x, 2\sqrt{1-x^2})$ とおき, 四角形 $OAPC$ の面積を靴紐公式または三角形の和で $x + \sqrt{1-x^2}$ と表す。これを最大化する。(2) は三角形 ABC を基準にし, 右側弧 AC に点を 1 つ加える面積増分と, 左側弧 CB に点を 1 つ加える面積増分を独立に最大化する。各増分は (1) の最大値から三角形 OAC の面積 1 を引いたものになる。

【解答】

(1) 第 1 象限の点を $P = (x, 2\sqrt{1-x^2})$, $0 < x < 1$ とおく。靴紐公式より四角形の面積は

$$S(x) = x + \sqrt{1-x^2}.$$

微分すると

$$S'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$0 < x < 1/\sqrt{2}$ で $S'(x) > 0$, $1/\sqrt{2} < x < 1$ で $S'(x) < 0$ だから, 唯一の最大点は $x = 1/\sqrt{2}$ である。よって

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right), \quad \max S = \sqrt{2}.$$

(2) 三角形 ABC の面積は 2 である。右側弧へ 1 点加える面積増分は $[OAPC] - [OAC]$ であり, (1) から高々 $\sqrt{2} - 1$ である。左側も同じなので, 左右へ 1 点ずつ置けば

$$2 + 2(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}.$$

同じ側へ 2 点置く場合も比較する。右側弧上の 2 点を偏角 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$ で表し,

$$\alpha = \theta_1, \quad \beta = \theta_2 - \theta_1, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \theta_2$$

とおく。靴紐公式で辺ごとの増分を計算すると, 三角形 ABC からの増分は

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - 1.$$

固定した和のもとで

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2} \leq 2 \sin \frac{u+v}{2}$$

だから, 2 角を平均するたび正弦和は減らない。よって $\alpha = \beta = \gamma = \pi/6$ で最大となり, 同じ側での増分は高々 $1/2$ である。一方, 左右 1 点ずつの増分は $2(\sqrt{2} - 1) > 1/2$ である。左側へ 2 点置く場合も同じである。したがって五角形の最大面積は

$$2\sqrt{2}.$$

▶ 解法 2

【方針】

$Y = y/2$ という縦方向の縮小で、上半楕円を単位円の上半分へ移す。面積は元の $1/2$ になる。円周上の点を偏角で表すと、辺を分割したときの面積増分が正弦の和で書ける。左右に 1 点ずつ置く場合と、同じ側に 2 点置く場合を比較して配置も含めて最大を確定する。

【解答】

変換

$$(X, Y) = \left(x, \frac{y}{2}\right)$$

を行う。すべての y 座標が半分になるので、三角形分割した各部分の高さ、したがって任意の多角形の面積も元の半分になる。曲線は上半単位円 $X^2 + Y^2 = 1$ へ移る。

(1) $P' = (\cos \theta, \sin \theta)$ とおくと、変換後の四角形の面積は

$$\frac{1}{2}(\sin \theta + \cos \theta) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

等号は $\theta = \pi/4$ で成立する。元へ戻して

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right), \quad \max[OAPC] = \sqrt{2}.$$

(2) 変換後の三角形 ABC の面積は 1 である。左右の四分円弧へ 1 点ずつ加える増分はそれぞれ高々 $(\sqrt{2} - 1)/2$ なので、変換後の面積 $\sqrt{2}$ を実現できる。

同じ側へ 2 点置き、その四分円を中心角 α, β, γ に分けると、辺ごとの三角形の面積から増分は

$$\frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - 1), \quad \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

固定した和に対して

$$\sin u + \sin v \leq 2 \sin \frac{u+v}{2}$$

だから、2 角を平均する操作を繰り返すと正弦和は増加する。よって 3 角が等しいとき最大で、増分は高々 $1/4$ である。これは左右へ 1 点ずつ置く増分 $\sqrt{2} - 1$ より小さい。したがって変換後の最大面積は $\sqrt{2}$ 、元の最大面積は

$$2\sqrt{2}.$$

【総評】 難度 6, 計算量 5。目安時間は 25 分。(1) は点を $(x, 2\sqrt{1-x^2})$ または偏角で表し、四角形の面積を正しく作ることが主要な採点ポイントである。(2) では左右に 1 点ずつ置いた値を出すだけでなく、2 点を同じ側へ置く場合がそれを超えないことを比較して完答となる。縦方向の縮小で半円へ移すと、面積倍率を保ったまま正弦の和として整理できる。最大配置と最大値 $2\sqrt{2}$ の両方を明記したい。

【第 5 問】

z, w を相異なる複素数で z の虚部は正, w の虚部は負とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $1, z, -1, w$ が複素数平面の同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\frac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)}$$

が負の実数となることであることを示せ。

- (2) $z = x + yi$ が $x < 0$ と $y > 0$ を満たすとする。 $1, z, -1, \frac{1+z^2}{2}$ が複素数平面の同一円周上にあるとき, 複素数 z の軌跡を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は 4 点が同一円周上にある条件を, 弦 $1, -1$ を見込む角の等しさとして偏角で表す。向き付き角を使うと, 与えられた複素数比が実数で, さらに負であることに対応する。(2) は $w = (1+z^2)/2$ を代入し, $z = x + yi$ として比の虚部が 0 になる条件を計算する。 $y > 0$ より円 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ が得られ, 負の実数になる条件から $-1 < x < 0$ を加える。

【解答】

(1) z と w は弦 $1, -1$ の反対側にある。4 点が同一円周上にあることは, この弦を見込む向き付き角が一致することと同値であり, 偏角で

$$\arg \frac{z-1}{z+1} \equiv \arg \frac{w-1}{w+1} \pmod{\pi}$$

と書ける。反対側から見込むため対応する比は正でなく負の実数である。式を整理すると

$$\frac{z-1}{z+1} \frac{w+1}{w-1} = \frac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)},$$

よって必要十分条件が得られる。

- (2) $w = (1+z^2)/2$ を代入すると, $z \neq 1$ より

$$R = \frac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)} = \frac{z^2+3}{(z+1)^2}.$$

$z = x + yi$ とし

$$A = x^2 - y^2 + 3, \quad B = 2xy, \quad C = (x+1)^2 - y^2, \quad D = 2(x+1)y$$

とおけば $R = (A + Bi)/(C + Di)$ である。したがって

$$\operatorname{Im} R = \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} = \frac{2y(x^2 - 2x + y^2 - 3)}{C^2 + D^2}.$$

$y > 0$ だから, 実数条件は

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

である。この円上では

$$C^2 + D^2 = 16(x+1)^2, \quad AC + BD = 16x(x+1),$$

よって $x \neq -1$ に対して

$$R = \operatorname{Re} R = \frac{x}{x+1}.$$

$x < 0$ のもとでこれが負となるのは $-1 < x < 0$ である。 $x = -1$ では $z = -1$ となり比が未定義, $x = 0$ は問題の条件外である。したがって軌跡は

$$(x-1)^2 + y^2 = 4, \quad -1 < x < 0, \quad y > 0$$

で表される両端を含まない円弧である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は弦 $1, -1$ を見込む向き付き角を複素数比の偏角に翻訳する。(2) では比を展開せず, $1, -1$ を通る円の一般方程式を作る。 $z = x + yi$ から円の係数を定め, $w = (1 + z^2)/2$ も同じ円上にある条件を代入・因数分解して軌跡を得る。

【解答】

(1) 弦 $1, -1$ を見込む向き付き角を偏角で表すと

$$\arg \frac{z-1}{z+1} \equiv \arg \frac{w-1}{w+1} \pmod{\pi}.$$

z, w は実軸の反対側にあるので, 比は正でなく負の実数になる。整理すると

$$\frac{z-1}{z+1} \frac{w+1}{w-1} = \frac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)},$$

これが求める必要十分条件である。

(2) $1, -1$ を通る円は

$$X^2 + Y^2 + \lambda Y - 1 = 0$$

と書ける。 $z = x + yi$ を代入すると

$$\lambda = \frac{1 - x^2 - y^2}{y}.$$

また

$$w = \frac{1 + z^2}{2} = \frac{1 + x^2 - y^2}{2} + xyi.$$

$u = (1 + x^2 - y^2)/2$, $v = xy$ として円の左辺へ代入すると

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + \lambda v - 1 &= \frac{1}{4} \{ (1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2 \} + x(1 - x^2 - y^2) - 1 \\ &= \frac{1}{4} \{ x^2 - 2x + y^2 - 3 \} \{ x^2 - 2x + y^2 + 1 \}. \end{aligned}$$

第 2 因子は $(x-1)^2 + y^2 > 0$ だから

$$(x-1)^2 + y^2 = 4.$$

逆にこの円上で $x < 0, y > 0$ なら上の計算を逆にたどれ, さらに $\operatorname{Im} w = xy < 0$ だから (1) の上下条件も満たす。上半円弧で $x < 0$ となる範囲は $-1 < x < 0$ であり, 端点は条件外または比が未定義である。したがって軌跡は

$$(x-1)^2 + y^2 = 4, \quad -1 < x < 0, \quad y > 0.$$

【総評】 難度 8, 計算量 7。目安時間は 35 分。(1) では「実数」だけでなく, z, w が弦の反対側にあるため負の実数になるところまで説明する。(2) は比の虚部を直接計算しても, $1, -1$ を通る円の一般方程式を使ってもよい。候補の円を得た後, 元の負の実数条件または z, w の上下関係を逆向きにも確認することが必要十分性の採点点である。最後に $-1 < x < 0$ と端点を含まない理由を明記する。

【第 6 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) n を正の整数として、次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

- (2) 次の積分値 I を最小にする実数 a の値と、その最小値を求めよ。

$$I = \int_0^{2\pi} (x^2 - a \cos 2x)^2 \, dx$$

【方針】

(1) は部分積分を 2 回行い、 $\sin 2n\pi = 0$ 、 $\cos 2n\pi = 1$ を使って境界項を整理する。(2) は積分を a の 2 次式として展開し、

(1) で $n = 2$ の場合の

$$\int x^2 \cos 2x \, dx$$

を使う。さらに

$$\int \cos^2 2x \, dx$$

と

$$\int x^4 \, dx$$

を求め、平方完成で最小値とそのときの a を出す。

【解答】

(1)

$$J_n = \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

とおく。部分積分を行うと

$$J_n = \left[\frac{x^2 \sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx$$

である。 $\sin 2n\pi = 0$ なので第 1 項は 0 である。

さらに

$$\int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = \left[-\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx$$

である。ここで $\left[-\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{n}$ であり、

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} = 0$$

である。したがって

$$\int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx = -\frac{2\pi}{n}$$

である。よって $J_n = -\frac{2}{n} \left(-\frac{2\pi}{n} \right) = \frac{4\pi}{n^2}$ である。

(2) 積分を展開すると

$$I = \int_0^{2\pi} x^4 \, dx - 2a \int_0^{2\pi} x^2 \cos 2x \, dx + a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 2x \, dx$$

である。

(1) で $n = 2$ とすると

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos 2x \, dx = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

である。また $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$ なので

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 2x \, dx = \pi$$

である。さらに

$$\int_0^{2\pi} x^4 \, dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^{2\pi} = \frac{32\pi^5}{5}$$

である。

したがって $I = \frac{32\pi^5}{5} - 2\pi a + \pi a^2$ である。平方完成すると $I = \pi(a-1)^2 + \frac{32\pi^5}{5} - \pi$ である。よって I を最小にする実数 a は $a = 1$ であり、その最小値は $\frac{32\pi^5}{5} - \pi$ である。

【総評】 難度 5, 計算量 5。目安時間は 22 分。(1) は 2 回の部分積分で、 $\sin 2n\pi = 0$, $\cos 2n\pi = 1$ を境界項へ正確に入れる。(2) では (1) の $n = 2$ を再利用し、 $\cos^2 2x$ と x^4 の積分を別々に確定することが主要な採点点である。得られた $I(a)$ は上にでなく下に凸の 2 次関数なので、平方完成または微分で $a = 1$ と最小値を同時に示せる。