

東北大学 2016 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

鋭角三角形 $\triangle ABC$ において、頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 四角形 $BCEF$ と $AFHE$ が円に内接することを示せ。
- (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は垂線からできる直角を同一円周上の条件に結びつける。特に、2 点 E, F から同じ線分 BC を直角に見ること、2 点 E, F から同じ線分 AH を直角に見ることを使う。(2) は D を原点、 BC を x 軸、 AD を y 軸にとり、垂線の足 E, F を直線の交点として求める。直線 DE, DF の傾きが互いに反対になることを示せば、 AD を対称軸として $\angle ADE = \angle ADF$ が従う。

【解答】

(1) $BE \perp AC$ で、 E は AC 上にあるから $\angle BEC = 90^\circ$ である。また $CF \perp AB$ で、 F は AB 上にあるから $\angle BFC = 90^\circ$ である。したがって E, F はいずれも線分 BC を直角に見込む点である。よって $\angle BEC + \angle BFC = 180^\circ$ となり、四角形 $BCEF$ は円に内接する。

次に、 H は垂心なので EH は BE 上にあり、 AE は AC 上にある。したがって $AE \perp EH$ であり、 $\angle AEH = 90^\circ$ である。同様に FH は CF 上、 AF は AB 上にあるから $\angle AFH = 90^\circ$ である。よって E, F はいずれも線分 AH を直角に見込む点であり、四角形 $AFHE$ も円に内接する。

(2) D を原点、 BC を x 軸、 AD を y 軸にとる。鋭角三角形なので $A = (0, h)$, $B = (-u, 0)$, $C = (v, 0)$ ($u, v, h > 0$) とおける。さらに頂点 A の角が鋭角であるから、 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = h^2 - uv > 0$ である。

まず E を求める。直線 AC の方向ベクトルは $(v, -h)$ である。 $E = A + \lambda(C - A) = (\lambda v, h(1 - \lambda))$ とおくと、 $BE \perp AC$ より $(E - B) \cdot (v, -h) = 0$ である。すなわち $(\lambda v + u)v - h^2(1 - \lambda) = 0$ だから $\lambda = \frac{h^2 - uv}{h^2 + v^2}$ である。したがって $E = \left(\frac{v(h^2 - uv)}{h^2 + v^2}, \frac{hv(u + v)}{h^2 + v^2} \right)$ となる。

同様に、直線 AB 上の点を $F = A + \mu(B - A) = (-\mu u, h(1 - \mu))$ とおく。 $CF \perp AB$ より $(F - C) \cdot (-u, -h) = 0$ であるから $\mu = \frac{h^2 - uv}{h^2 + u^2}$ を得る。よって $F = \left(\frac{u(uv - h^2)}{h^2 + u^2}, \frac{hu(u + v)}{h^2 + u^2} \right)$ である。 D は原点であるから、直線 DE の傾きは

$$\frac{\frac{hv(u + v)}{h^2 + v^2}}{\frac{v(h^2 - uv)}{h^2 + v^2}} = \frac{h(u + v)}{h^2 - uv}$$

である。また直線 DF の傾きは

$$\frac{\frac{hu(u + v)}{h^2 + u^2}}{\frac{u(uv - h^2)}{h^2 + u^2}} = -\frac{h(u + v)}{h^2 - uv}$$

である。ここで $h^2 - uv > 0$ なので、 E は AD の右側、 F は左側にある。したがって DE と DF は y 軸、すなわち AD に関して対称である。よって $\angle ADE = \angle ADF$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は直角を用いて 2 組の円を確定する。(2) ではさらに四角形 $CDHE$ と $BDHF$ も円に内接することを示し、円周角を順に移す。最後に $CH \perp AB$, $BH \perp AC$ から、移した 2 つの角がとも $90^\circ - \angle A$ であることを確認する。座標計算を使わず、垂足図形に現れる 4 つの円だけで証明を閉じる。

【解答】

(1) $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ であるから、 B, C, E, F は直径 BC の円周上にある。また $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$ であるから、 A, E, H, F は直径 AH の円周上にある。したがって四角形 $BCEF$, $AFHE$ はいずれも円に内接する。

(2) $CD \perp DH$, $CE \perp EH$ より

$$\angle CDH = \angle CEH = 90^\circ$$

であるから、四角形 $CDHE$ は円に内接する。同様に $BD \perp DH$, $BF \perp FH$ より、四角形 $BDHF$ も円に内接する。

三角形 ABC は鋭角三角形なので、垂心 H は内部にあり、 D, H, A はこの順に同一直線上にある。したがって円周角の性質から

$$\angle EDA = \angle EDH = \angle ECH, \quad \angle ADF = \angle HDF = \angle HBF$$

となる。ところが EC は AC 上、 $CH \perp AB$ であるから

$$\angle ECH = 90^\circ - \angle BAC$$

である。また BF は BA 上、 $BH \perp AC$ であるから、同じく

$$\angle HBF = 90^\circ - \angle BAC$$

である。よって $\angle EDA = \angle ADF$, すなわち $\angle ADE = \angle ADF$ が示された。

【総評】 難度 5, 計算量 4. 目安時間は 25 分。(1) は「同じ線分を直角に見る点は同一円周上にある」という標準事実を、 BC と AH の 2 回に分けて使う問題である。(2) は座標なら垂足を正確に求め、鋭角条件から $h^2 - uv > 0$ まで書くことが完答の要点になる。幾何解法では $CDHE$, $BDHF$ という追加の円を発見できるかが差になる。最低限、利用する円周角がどの弦を見込むかを一つずつ明記し、最後に両角が $90^\circ - \angle A$ へ一致する流れを答案上で閉じたい。

【第 2 問】

以下の問いに答えよ。

(1) 6 以上の整数 n に対して不等式

$$2^n > n^2 + 7$$

が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2) 等式

$$p^q = q^p + 7$$

を満たす素数の組 (p, q) をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $n = 6$ を起点にし、帰納法の仮定から $2^{n+1} > 2(n^2 + 7)$ を得る。残りは $2n^2 + 14 > (n+1)^2 + 7$ を $n \geq 6$ で確認する。(2) はまず偶奇を見る。両方が奇素数なら左辺と右辺の差が偶数になり 7 に等しくないで、一方が 2 である。 $p = 2$ と $q = 2$ の場合を分け、(1) で大きい素数を排除し、小さい素数は直接確認する。

【解答】

(1) $n = 6$ のとき $2^6 = 64$, $6^2 + 7 = 43$ なので $2^6 > 6^2 + 7$ である。

次に、ある $n \geq 6$ で $2^n > n^2 + 7$ が成り立つと仮定する。このとき $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 + 14$ である。ここで $(2n^2 + 14) - \{(n+1)^2 + 7\} = n^2 - 2n + 6 = (n-1)^2 + 5 > 0$ だから $2n^2 + 14 > (n+1)^2 + 7$ である。したがって $2^{n+1} > (n+1)^2 + 7$ が成り立つ。数学的帰納法により、すべての 6 以上の整数 n に対して $2^n > n^2 + 7$ である。

(2) $p^q = q^p + 7$ より $p^q - q^p = 7$ である。

もし p, q がともに奇素数なら, p^q も q^p も奇数であり, 差 $p^q - q^p$ は偶数になる。これは 7 に等しくない。したがって p, q の少なくとも一方は 2 である。

まず $p = 2$ とする。このとき $2^q = q^2 + 7$ である。 $q = 2$ では $4 \neq 11$, $q = 3$ では $8 \neq 16$, $q = 5$ では $2^5 = 32 = 5^2 + 7$ である。 $q \geq 7$ なら q は 6 以上なので, (1) より $2^q > q^2 + 7$ となり, 等号は成り立たない。よってこの場合は $(p, q) = (2, 5)$ だけである。

次に $q = 2$ とする。このとき $p^2 = 2^p + 7$ である。 $p = 2$ では不適であり, $p = 3, 5$ についても $3^2 = 9 \neq 15 = 2^3 + 7$, $5^2 = 25 \neq 39 = 2^5 + 7$ である。 $p \geq 7$ なら (1) より $2^p > p^2 + 7 > p^2$ となるため, $p^2 = 2^p + 7$ は成り立たない。したがって新しい解はない。

以上より, 求める素数の組は $(p, q) = (2, 5)$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は指定通り数学的帰納法で示す。(2) では偶奇から一方が 2 であることを出した後, $q = 2$ の枝を法 8 で一度に排除する。残る $p = 2$ では, (1) によって $q \geq 7$ を排除し, 素数 2, 3, 5 だけを直接代入する。

【解答】

(1) $n = 6$ では

$$2^6 = 64 > 43 = 6^2 + 7$$

である。ある $n \geq 6$ で $2^n > n^2 + 7$ と仮定すると

$$2^{n+1} > 2n^2 + 14.$$

さらに

$$2n^2 + 14 - \{(n+1)^2 + 7\} = (n-1)^2 + 5 > 0$$

だから, $2^{n+1} > (n+1)^2 + 7$ である。よって数学的帰納法により, すべての $n \geq 6$ で

$$2^n > n^2 + 7$$

が成り立つ。

(2) p, q がともに奇素数なら, $p^q - q^p$ は偶数であり, 7 にはならない。したがって一方は 2 である。

まず $q = 2$ とする。 $p = 2$ は元の式を満たさない。 p が奇素数なら $p \geq 3$ であり,

$$p^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

である。一方,

$$2^p + 7 \equiv 0 + 7 \equiv 7 \pmod{8}$$

だから, $p^2 = 2^p + 7$ は不可能である。

したがって $p = 2$ でなければならない。このとき

$$2^q = q^2 + 7.$$

$q = 2, 3, 5$ を代入すると, 成立するのは

$$2^5 = 32 = 5^2 + 7$$

だけである。また素数 $q \geq 7$ では (1) により $2^q > q^2 + 7$ なので等号は成り立たない。ゆえに

$$(p, q) = (2, 5)$$

である。

【総評】 難度 5, 計算量 4。目安時間は 22 分。(1) は帰納法の仮定を 2 倍した後, $(n-1)^2 + 5 > 0$ で次の段へ接続するところが最低限の得点点である。(2) では「両方奇数は不可能」から一方が 2 とし, $p = 2$ と $q = 2$ を別々に処理する。後者を法 8 で落とせると簡潔で, 前者は (1) で大きい素数を排除し, 2, 3, 5 の直接確認まで書けば漏れのない完答になる。

【第 3 問】

サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に a, b, c とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。
- (2) a, b, c がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

サイコロは順序付きに数えるが、三角形の判定は 3 つの目を小さい順 $r \leq s \leq t$ に並べて行う。(1) は 1 から 6 までの整数辺でピタゴラスの関係を満たす組を探す。(2) は三角形条件 $r + s > t$ と鈍角条件 $r^2 + s^2 < t^2$ を満たす組を列挙し、等しい辺の有無に応じて順列数を数える。

【解答】

(1) 3 つの目を小さい順に $r \leq s \leq t$ と並べる。直角条件 $r^2 + s^2 = t^2$ を最大辺ごとに確認すると

t	1	2	3	4	5	6
(r, s)	なし	なし	なし	なし	(3, 4)	なし

となる。したがって辺の組は (3, 4, 5) だけである。3 辺が相異なるので順序付きの出方は $3! = 6$ 通り、よって

$$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

(2) 鈍角三角形の条件は

$$r + s > t, \quad r^2 + s^2 < t^2.$$

この 2 条件を最大辺 t ごとに同時に調べると

t	(r, s)	順序数
1, 2	なし	0
3	(2, 2)	3
4	(2, 3)	6
5	(2, 4), (3, 3)	6 + 3
6	(2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 4)	6 + 6 + 6 + 3

である。各行は $1 \leq r \leq s \leq t$ の全候補に対して上の 2 不等式を照合したものなので、漏れも重複もない。3 辺が相異なる 5 組は各 6 通り、2 辺が等しい 3 組は各 3 通りであり、有利な出方は

$$5 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 39.$$

したがって求める確率は

$$\frac{39}{216} = \frac{13}{72}.$$

▶ 解法 2

【方針】

3 辺を $r \leq s \leq t$ とし, 最大辺と中辺の差 $d = t - s$ を導入する。三角形条件は $d < r$, 鈍角条件は $r^2 < d(2s + d)$ となる。目が 6 以下なので $d = 1, 2$ だけに絞れ, 最大辺別の総当たりとは異なる短い列挙ができる。直角の場合は不等号を等号へ替える。

【解答】

$r \leq s \leq t$ とし, $d = t - s$ とおく。三角形条件は

$$r + s > s + d \iff d < r.$$

また

$$t^2 - (r^2 + s^2) = d(2s + d) - r^2$$

である。 $d < r \leq s$ より $s \geq d + 1$, さらに $t = s + d \leq 6$ だから $2d + 1 \leq 6$, すなわち $d = 1, 2$ だけを調べればよい。

(1) 直角条件は $r^2 = d(2s + d)$ である。 $d = 1$ では $r^2 = 2s + 1$ となり, $2 \leq s \leq 5$ のうち $s = 4, r = 3$ だけが該当する。 $d = 2$ では $s = 3, 4$ を調べても該当しない。よって唯一の辺の組は $(3, 4, 5)$ であり,

$$\frac{3!}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

(2) 鈍角条件は $r^2 < d(2s + d)$ である。有限個の候補を調べると

d	s	r
1	2	2
1	3	2
1	4	2
1	5	2, 3
2	3	3
2	4	3, 4

となり, 辺の組は

$$(2, 2, 3), (2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 5, 6), (3, 3, 5), (3, 4, 6), (4, 4, 6).$$

3 辺が相異なる 5 組と 2 辺が等しい 3 組があるから, 有利な順序付きの出方は

$$5 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 39.$$

したがって

$$\frac{39}{6^3} = \frac{13}{72}.$$

【総評】 難度 4, 計算量 4。目安時間は 18 分。三角形条件を確認してから最大辺に対する平方比較を行うのが最低限の骨格である。鈍角の列挙では最大辺 t ごとに表を作ると, 退化三角形や直角三角形の混入を防げる。サイコロの標本は順序付きなので, 3 辺がすべて異なる組は 6 通り, 2 辺が等しい組は 3 通りへ戻す部分が主要な採点点であり, 合計 39 通りまで明記したい。

【第 4 問】

多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$$

により定める。ただし、 i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$ とするとき、係数 $a_0, \dots, a_7$ をすべて求めよ。
 (2) $0 < \theta < \pi$ に対して、

$$P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) (1) で求めた a_1, a_3, a_5, a_7 を用いて、多項式 $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$ を考える。 $\theta = \frac{\pi}{7}$ として、 $k = 1, 2, 3$ について

$$x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$$

とおく。このとき、 $Q(x_k) = 0$ が成り立つことを示し、 $x_1 + x_2 + x_3$ の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は二項定理で奇数番目の i を含む項だけが残ることを利用する。(2) は $x = \cot \theta$ とおき、 $x \pm i = (\cos \theta \pm i \sin \theta) / \sin \theta$ として、ド・モアブルの形で $\sin 7\theta$ を取り出す。(3) では $P(x)$ が偶関数なので $P(x) = Q(x^2)$ と見て、 $x_k = \cot^2 k\theta$ が Q の根であることを示し、解と係数の関係で和を求める。

【解答】

(1) 二項定理より $(x+i)^7 - (x-i)^7$ では、 i の偶数乗を含む項は打ち消し合い、奇数乗を含む項だけが残る。したがって

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2i} \{ 2 \cdot {}_7C_1 x^6 i + 2 \cdot {}_7C_3 x^4 i^3 \\ &\quad + 2 \cdot {}_7C_5 x^2 i^5 + 2 \cdot {}_7C_7 i^7 \} \\ &= 7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1 \end{aligned}$$

である。よって

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 7, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -35, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = 21, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = -1$$

である。

(2) $0 < \theta < \pi$ なので $\sin \theta > 0$ である。 $x = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ とおくと

$$x+i = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\sin \theta}, \quad x-i = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\sin \theta}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^7 - (\cos \theta - i \sin \theta)^7}{\sin^7 \theta} \\ &= \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta} \end{aligned}$$

である。

(3) (1) より $Q(x) = 7x^3 - 35x^2 + 21x - 1$ であり、また $P(X) = Q(X^2)$ である。 $\theta = \frac{\pi}{7}$ とする。 $k = 1, 2, 3$ では $0 < k\theta < \pi$ であり、(2) を $k\theta$ に適用できる。すると

$$P\left(\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right) = \frac{\sin 7k\theta}{\sin^7 k\theta} = \frac{\sin k\pi}{\sin^7 k\theta} = 0$$

である。左辺は

$$P\left(\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right) = Q\left(\frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}\right) = Q(x_k)$$

であるから $Q(x_k) = 0$ である。ここで $0 < \theta < 2\theta < 3\theta < \pi/2$ であり、 $\cot u$ はこの区間で正かつ狭義に減少する。したがって x_1, x_2, x_3 は正で互いに異なる。3 次方程式 $7x^3 - 35x^2 + 21x - 1 = 0$ の 3 つの根が x_1, x_2, x_3 なので、解と係数の関係より $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-35}{7} = 5$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) で得た $P(x)$ へ $x = \cot \theta$ を直接代入し、分母を $\sin^7 \theta$ へそろえる。分子は 7 倍角の加法定理を展開した $\sin 7\theta$ そのものである。(3) は $P(X) = Q(X^2)$ を用いて 3 つの $\cot^2(k\pi/7)$ を Q の相異なる根と確定し、解と係数の関係で和だけを読む。

【解答】

(1) 二項展開で奇数乗の i を含む項だけを残すと

$$P(x) = 7x^6 - 35x^4 + 21x^2 - 1.$$

したがって

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (0, 7, 0, -35, 0, 21, 0, -1).$$

(2) $x = \cot \theta$ を (1) の式へ代入すると

$$P(\cot \theta) = \frac{7 \cos^6 \theta \sin \theta - 35 \cos^4 \theta \sin^3 \theta + 21 \cos^2 \theta \sin^5 \theta - \sin^7 \theta}{\sin^7 \theta}.$$

ここで $S_n = \sin n\theta$, $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ とおく。加法定理から

$$S_{n+1} = 2cS_n - S_{n-1}, \quad S_0 = 0, \quad S_1 = s$$

である。順に代入すれば

n	S_n/s
3	$4c^2 - 1$
4	$8c^3 - 4c$
5	$16c^4 - 12c^2 + 1$
6	$32c^5 - 32c^3 + 6c$
7	$64c^6 - 80c^4 + 24c^2 - 1$

を得る。 $s^2 = 1 - c^2$ を使うと最終行は

$$S_7 = 7sc^6 - 35s^3c^4 + 21s^5c^2 - s^7$$

と書き直せる。よって分子は $\sin 7\theta$ に等しい。 $0 < \theta < \pi$ では $\sin \theta \neq 0$ だから

$$P\left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7 \theta}.$$

(3) (1) より

$$Q(x) = 7x^3 - 35x^2 + 21x - 1, \quad P(X) = Q(X^2).$$

$\theta = \pi/7$ とおくと、 $k = 1, 2, 3$ に対して

$$Q(\cot^2 k\theta) = P(\cot k\theta) = \frac{\sin 7k\theta}{\sin^7 k\theta} = 0.$$

さらに $0 < \theta < 2\theta < 3\theta < \pi/2$ であり、 $\cot u$ はこの区間で正かつ狭義に減少するから、これら 3 数は相異なる。よってこれらが 3 次方程式 $Q(x) = 0$ の 3 根である。解と係数の関係より

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-35}{7} = 5.$$

【総評】 難度 7, 計算量 7。目安時間は 30 分。(1) は $i^3 = -i$, $i^5 = i$, $i^7 = -i$ の符号を正確に追う。(2) は $\sin \theta \neq 0$ を確認してから分母を $\sin^7 \theta$ にそろえ、7 倍角の分子へ一致させることが最低限の採点点である。(3) では $P(X) = Q(X^2)$ を介して根が $\cot^2(k\pi/7)$ であることを示す。3 根が相異なる理由まで書き、個々の三角比を求めず解と係数の関係へ進めると完成度が高い。

【第 5 問】

空間内に、直線 l で交わる 2 平面 α, β と交線 l 上の 1 点 O がある。さらに、平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を、どちらも点 O を通り l に垂直にとる。 m, n 上にそれぞれ点 P, Q があり、

$$OP = \sqrt{3}, \quad OQ = 2, \quad PQ = 1$$

であるとする。線分 PQ 上の動点 T について、 $PT = t$ とおく。点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ。
- (2) S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく。 T が線分 PQ 上を動くとき、 $f(t)$ の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

m, n はどちらも交線 l に垂直なので、 m, n のなす角が 2 平面 α, β のなす角になる。三角形 OPQ に余弦定理を使ってこの角を求める。点 T は PQ 上で $PT = t$ 、 $PQ = 1$ だから、各平面までの距離は線分上で一次的に変化する。(1) は球の半径 $\sqrt{2}$ と平面までの距離から切り口の面積 $\pi(2 - d^2)$ を使う。(2) は 2 つの切り口面積の和を 2 次関数にして最大化する。

【解答】

(1) m, n はいずれも l に垂直であり、それぞれ平面 α, β 上にある。したがって m, n のなす角は 2 平面 α, β のなす角である。

三角形 OPQ において $OP = \sqrt{3}$, $OQ = 2$, $PQ = 1$ である。 $\angle POQ = \varphi$ とすると、余弦定理より $1^2 = (\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cos \varphi$ だから $\cos \varphi = \frac{3+4-1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。よって $\varphi = 30^\circ$ である。

点 P は平面 α 上にある。点 Q から平面 α までの距離は、 OQ に対して角 30° の反対側の高さなので $2 \sin 30^\circ = 1$ である。 T は PQ 上で $PT = t$ 、 $PQ = 1$ だから、 T から平面 α までの距離は t である。

半径 $\sqrt{2}$ の球を、中心から距離 d の平面で切ると、切り口の円の半径の 2 乗は $2 - d^2$ である。ここでは $d = t$ なので、切り口の面積は $\pi(2 - t^2)$ である。

(2) 今度は平面 β までの距離を考える。点 Q は平面 β 上にあり、点 P から平面 β までの距離は $OP \sin 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。 $QT = 1 - t$ なので、 T から平面 β までの距離は $\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - t)$ である。

したがって

$$\begin{aligned} f(t) &= \pi(2 - t^2) + \pi \left\{ 2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - t) \right)^2 \right\} \\ &= \pi \left\{ 4 - t^2 - \frac{3}{4}(1 - t)^2 \right\} \\ &= \pi \left(\frac{13}{4} + \frac{3}{2}t - \frac{7}{4}t^2 \right) \end{aligned}$$

である。ここで $0 \leq t \leq 1$ である。

平方完成すると

$$\frac{13}{4} + \frac{3}{2}t - \frac{7}{4}t^2 = -\frac{7}{4} \left(t - \frac{3}{7} \right)^2 + \frac{25}{7}$$

である。 $\frac{3}{7}$ は $[0, 1]$ に含まれるので、最大値は $\frac{25\pi}{7}$ であり、そのとき $t = \frac{3}{7}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

交線 l を z 軸, 平面 α を xz 平面, 直線 m を x 軸に取る。余弦定理から m, n の角が 30° と分かるので, P, Q, T を座標表示できる。各平面への距離を平面の法線との内積で直接求め, 球の切り口面積を 2 次式として最大化する。

【解答】

(1) l を z 軸, α を xz 平面, m を x 軸とする。三角形 OPQ で

$$OP = \sqrt{3}, \quad OQ = 2, \quad PQ = 1$$

だから, 余弦定理より $\angle POQ = 30^\circ$ である。したがって座標を

$$P = (\sqrt{3}, 0, 0), \quad Q = (\sqrt{3}, 1, 0)$$

と選べる。 $PT = t$, $PQ = 1$ より

$$T = (\sqrt{3}, t, 0).$$

平面 α は $y = 0$ だから, T から α までの距離は t である。半径 $\sqrt{2}$ の球を中心から距離 d の平面で切った円の面積は $\pi(2 - d^2)$ なので, 求める面積は

$$\pi(2 - t^2)$$

である。

(2) 平面 β は, z 軸と方向ベクトル

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

を含む。よってその単位法線ベクトルを

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$$

と取れる。したがって T から β までの距離は

$$\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - t)$$

である。ゆえに 2 つの切り口の面積の和は

$$\begin{aligned} f(t) &= \pi(2 - t^2) + \pi \left\{ 2 - \frac{3}{4}(1 - t)^2 \right\} \\ &= \pi \left\{ -\frac{7}{4} \left(t - \frac{3}{7} \right)^2 + \frac{25}{7} \right\}. \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 1$ で $3/7$ はこの範囲内にあるから,

$$\max f(t) = \frac{25\pi}{7}$$

であり, そのとき $t = 3/7$ である。

【総評】 難度 6, 計算量 5。目安時間は 26 分。まず余弦定理で平面角が 30° と分かることが入口である。幾何解法では線分 PQ 上で平面までの距離が一次的に変わること, 座標解法では β の単位法線を正しく置くことが主要な採点点になる。切り口の面積は $\pi(\sqrt{2}^2 - d^2) = \pi(2 - d^2)$ であり, 距離そのものを面積にしない。最後は平方完成と $3/7 \in [0, 1]$ の確認まで書いて完答となる。

【第 6 問】

関数

$$f(x) = \int_0^{\pi} |\sin(t-x) - \sin 2t| dt$$

の区間 $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

絶対値の中身を $g(t) = \sin(t-x) - \sin 2t$ とおき、和積公式で符号を調べる。 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq t \leq \pi$ では $\sin((t+x)/2) \geq 0$ なので、符号変化は $\cos((3t-x)/2) = 0$ から決まる。分点 $r = (\pi+x)/3$ で積分を分割し、原始関数を用いて $f(x)$ を 1 つの三角関数に整理する。最後は角 $2x/3 + \pi/6$ の範囲で最大・最小を読む。

【解答】

$g(t) = \sin(t-x) - \sin 2t$ とおく。和積公式より

$$\begin{aligned} g(t) &= 2 \cos \frac{3t-x}{2} \sin \left(-\frac{t+x}{2} \right) \\ &= -2 \sin \frac{t+x}{2} \cos \frac{3t-x}{2}. \end{aligned}$$

$0 \leq x, t \leq \pi$ では $\sin((t+x)/2) \geq 0$ である。符号変化点は

$$\frac{3t-x}{2} = \frac{\pi}{2} \iff r = \frac{\pi+x}{3}, \quad \frac{\pi}{3} \leq r \leq \frac{2\pi}{3}$$

であり、 $0 \leq t < r$ で $g(t) \leq 0$, $r < t \leq \pi$ で $g(t) \geq 0$ となる。したがって

$$f(x) = -\int_0^r g(t) dt + \int_r^{\pi} g(t) dt.$$

原始関数は

$$\int g(t) dt = -\cos(t-x) + \frac{1}{2} \cos 2t$$

であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left[-\cos(t-x) + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^r + \left[-\cos(t-x) + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_r^{\pi} \\ &= 2 \cos(r-x) - \cos 2r + 1. \end{aligned}$$

ここで

$$r-x = \frac{\pi-2x}{3}, \quad 2r = \frac{2\pi+2x}{3}$$

を代入して整理すると

$$f(x) = 3 \sin \left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + 1.$$

$0 \leq x \leq \pi$ では角の範囲が

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{2x}{3} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$$

となる。よって $x = \pi/2$ のとき最大値 4, $x = 0, \pi$ のとき最小値 $5/2$ をとる。

▶ 解法 2

【方針】

積分をパラメータで微分せず、絶対値の三角不等式と補助符号関数で上下から評価する。上側は $|a - b| \leq |a| + |b|$ を積分し、 $x = \pi/2$ で等号を確認する。下側は $x = 0$ での被積分関数の符号に合わせた $\varepsilon(t) \in \{-1, 1\}$ を掛けて積分し、さらに $f(\pi - x) = f(x)$ を併用して一様な下界 $5/2$ を作る。

【解答】

まず三角不等式より

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \int_0^\pi |\sin(t - x)| dt + \int_0^\pi |\sin 2t| dt \\ &= 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

第 1 の積分は $u = t - x$ とおけば、長さ π の区間における $|\sin u|$ の積分なので 2 である。 $x = \pi/2$ のとき

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin 2t = -2 \sin t \cos^2 t \leq 0$$

であるから、ほとんどすべての t で 2 項の符号が反対になり、上の三角不等式で等号が成り立つ。よって最大値は 4 である。
次に

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} -1 & \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}\right), \\ 1 & \left(\frac{\pi}{3} < t \leq \pi\right) \end{cases}$$

とおく。 $|\varepsilon(t)| = 1$ より、任意の実数 y について $|y| \geq \varepsilon(t)y$ である。したがって

$$f(x) \geq \int_0^\pi \varepsilon(t) \{\sin(t - x) - \sin 2t\} dt.$$

ここで直接計算すると

$$\int_0^\pi \varepsilon(t) \sin t dt = 1, \quad \int_0^\pi \varepsilon(t) \cos t dt = -\sqrt{3}, \quad \int_0^\pi \varepsilon(t) \sin 2t dt = -\frac{3}{2}$$

であるから

$$f(x) \geq \frac{3}{2} + \cos x + \sqrt{3} \sin x.$$

一方、もとの積分で $t = \pi - u$ と置換すると $f(\pi - x) = f(x)$ である。上の評価を $\pi - x$ に適用して

$$f(x) \geq \frac{3}{2} - \cos x + \sqrt{3} \sin x$$

も得る。ゆえに

$$f(x) \geq \frac{3}{2} + \sqrt{3} \sin x + |\cos x|.$$

$0 \leq x \leq \pi/2$ では $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin(x + \pi/6) \geq 1$ である。 $\pi/2 \leq x \leq \pi$ でも $y = \pi - x$ とおけば同じ評価が使える。
したがって常に $f(x) \geq 5/2$ である。最後に、 $x = 0$ では $\sin t - \sin 2t$ が $t = \pi/3$ で符号を変えるので

$$\begin{aligned} f(0) &= - \int_0^{\pi/3} (\sin t - \sin 2t) dt + \int_{\pi/3}^\pi (\sin t - \sin 2t) dt \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

対称性から $f(\pi) = f(0)$ でもある。よって最小値は $5/2$ である。

【総評】 難度 8, 計算量 7。目安時間は 34 分。絶対値の符号変化点 $r = (\pi + x)/3$ を区間内で一意に決め、原始関数から $f(x)$ を明示するのが標準解法である。別解では三角不等式の等号条件と、 $x = 0$ での符号に合わせた補助関数による下側評価が採点の中心になる。可変上端・可変被積分関数を直接微分する大学範囲の公式には頼らない。最大値 4 と最小値 $5/2$ の両方について、実際に等号を達成する x まで確認して完答となる。