

東北大学 2017 年度 文系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面において、原点を中心とする半径 1 の円を C とする。 a, b を実数とし、放物線

$$D: y = x^2 + ax + b$$

の頂点 (p, q) が円 C 上にあるとする。

(1)

$$(p, q) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表すとき、 a, b を θ を用いて表せ。

(2) 放物線 D の $x = 1$ における接線が円 C の周を 2 等分するような組 (a, b) をすべて求めよ。

(3) 放物線 D の接線で円 C の周を 2 等分するものが、ただ一つ存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

放物線を頂点形 $y = (x - p)^2 + q$ で書き、 (p, q) が単位円上にあることを使う。円周を 2 等分する直線は原点を通る直線なので、(2) では $x = 1$ での接線が原点を通る条件を立てる。(3) では接点の x 座標を u 、 $v = u - p$ と置き、一般の接線が原点を通る条件を v の 2 次方程式にする。ただ一つ存在する条件は判別式 0 である。

【解答】

(1) 頂点を (p, q) とすると、放物線は $y = (x - p)^2 + q = x^2 - 2px + p^2 + q$ である。したがって $a = -2p$ 、 $b = p^2 + q$ である。 $(p, q) = (\cos \theta, \sin \theta)$ より $a = -2\cos \theta$ 、 $b = \cos^2 \theta + \sin \theta$ である。

(2) 円 C の周を 2 等分する直線は、円の中心である原点を通る直線である。 $x = 1$ における接線を求める。 $y = (x - p)^2 + q$ の導関数は $2(x - p)$ なので、接線は $y = 2(1 - p)(x - 1) + (1 - p)^2 + q$ である。これが原点を通る条件は $0 = -2(1 - p) + (1 - p)^2 + q$ であり、整理して $p^2 + q = 1$ となる。

一方、頂点は単位円上にあるから $p^2 + q^2 = 1$ である。 $q = 1 - p^2$ を代入すると $p^2 + (1 - p^2)^2 = 1$ すなわち $p^2(p^2 - 1) = 0$ である。よって $(p, q) = (0, 1), (1, 0), (-1, 0)$ である。これを $a = -2p$ 、 $b = p^2 + q$ に代入して $(a, b) = (0, 1), (-2, 1), (2, 1)$ を得る。

(3) 接点の x 座標を u とする。接線は $y = 2(u - p)(x - u) + (u - p)^2 + q$ である。これが原点を通る条件は $0 = -2u(u - p) + (u - p)^2 + q$ である。 $v = u - p$ とおくと $u = v + p$ なので $0 = -2(v + p)v + v^2 + q$ すなわち $v^2 + 2pv - q = 0$ を得る。

原点を通る接線がただ一つ存在するには、この v の 2 次方程式が重解をもてばよい。したがって判別式より $(2p)^2 + 4q = 0$ すなわち $p^2 + q = 0$ である。よって $q = -p^2$ であり、さらに $p^2 + q^2 = 1$ から $p^2 + p^4 = 1$ を得る。 $X = p^2$ とおくと $X^2 + X - 1 = 0$ であり、 $X \geq 0$ より $p^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ である。このとき $b = p^2 + q = 0$ 、 $a = -2p$ だから、求める組は

$$(a, b) = \left(2\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, 0 \right), \quad \left(-2\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, 0 \right)$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

放物線 $y = x^2 + ax + b$ の接点を u とすると、接線の y 切片は $b - u^2$ である。原点を通る条件が直ちに $u^2 = b$ となるため、接線の本数を平方根の個数として判定する。

【解答】

(1) 頂点は

$$p = -\frac{a}{2}, \quad q = b - \frac{a^2}{4}$$

である。したがって $(p, q) = (\cos \theta, \sin \theta)$ より

$$a = -2 \cos \theta, \quad b = \cos^2 \theta + \sin \theta.$$

(2) 接点の x 座標を u とすると接線は

$$y = (2u + a)x + b - u^2$$

である。円周を 2 等分するには原点を通ればよいので、条件は $b = u^2$ である。 $u = 1$ では $b = 1$ 。頂点が単位円上にある条件へ代入すると

$$\frac{a^2}{4} + \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)^2 = 1$$

より $a = 0, \pm 2$ を得る。したがって

$$(a, b) = (0, 1), (2, 1), (-2, 1).$$

(3) 原点を通る接線の本数は、方程式 $u^2 = b$ の実数解の個数に等しい。これが 1 個であるための必要十分条件は $b = 0$ である。このとき頂点は

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right)$$

なので、単位円上の条件は

$$\frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{16} = 1.$$

$X = a^2/4$ とおけば $X^2 + X - 1 = 0$ だから

$$X = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

よって

$$(a, b) = \left(2\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, 0\right), \left(-2\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, 0\right).$$

【総評】 難度 6, 計算量 6。目安時間は 28 分。「円周を 2 等分する直線」は原点を通る直線である, という幾何的読み替えが最初の関門である。(2) は接線の式を原点に代入すればよいが, (3) では接点を動かすため, 接点座標 u と頂点からのずれ $v = u - p$ を分けると式が簡単になる。ただ一つの接線を「判別式 0」と結びつけるところまで書くと, 方針が明確な答案になる。

【第 2 問】

a を実数とする。 $z = x + yi$, $\bar{z} = x - yi$ (x, y は実数, i は虚数単位) として, 方程式

$$z^3 = \bar{z} + a \quad (*)$$

を考える。

(1) $a = 0$ のとき, $(*)$ を満たす z をすべて求めよ。

(2) $(*)$ を満たす z がちょうど 5 個存在するような a の値の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$z = x + yi$ として実部と虚部を比較する。虚部から $y = 0$ と $y \neq 0$ に分かれ, $y = 0$ は 3 次方程式 $x^3 - x - a = 0$ の実数解の個数に帰着する。 $y \neq 0$ では $y^2 = 3x^2 + 1$ を実部へ代入し, 任意の a に対して非実数解が常に 2 個あることを単調性で示す。全体で 5 個になる条件は, 実数解が相異なる 3 個ある条件で決まる。

【解答】

$z = x + yi$ とおく。すると $z^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$, $\bar{z} + a = (x + a) - yi$ である。実部と虚部を比較して $x^3 - 3xy^2 = x + a$, $3x^2y - y^3 = -y$ を得る。虚部の式は $y(3x^2 - y^2 + 1) = 0$ である。

(1) $a = 0$ とする。まず $y = 0$ の場合, 実部の式は $x^3 = x$ であるから $x = -1, 0, 1$ である。よって $z = -1, 0, 1$ を得る。

次に $y \neq 0$ の場合, $y^2 = 3x^2 + 1$ である。これを実部の式に代入し, $a = 0$ を用いると $x^3 - 3x(3x^2 + 1) = x$ すなわち $-8x^3 - 4x = 0$ である。よって $x = 0$ であり, $y^2 = 1$ から $y = \pm 1$ である。したがって $z = i, -i$ を得る。

以上より, 求める解は $z = -1, 0, 1, i, -i$ である。

(2) $y \neq 0$ の場合を一般の a で調べる。 $y^2 = 3x^2 + 1$ を実部の式に代入すると $x^3 - 3x(3x^2 + 1) = x + a$ より $a = -8x^3 - 4x$ である。右辺を x の関数と見ると導関数は $-24x^2 - 4 < 0$ であるから, 任意の実数 a に対して x はただ 1 つ定まる。そのとき $y = \pm\sqrt{3x^2 + 1}$ であり, 非実数解は常に 2 個ある。

したがって, 全体の解がちょうど 5 個になるためには, $y = 0$ の場合の実数解が相異なる 3 個あればよい。 $y = 0$ の場合は $x^3 - x - a = 0$ である。 $h(x) = x^3 - x$ とおくと $h'(x) = 3x^2 - 1$ であり, $x = -1/\sqrt{3}$ で極大, $x = 1/\sqrt{3}$ で極小をとる。値は

$$h\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

である。

よって方程式 $h(x) = a$ が相異なる 3 個の実数解をもつ条件は $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < a < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ である。このとき非実数解 2 個と合わせて解はちょうど 5 個になる。

▶ 解法 2

【方針】

(1) は極形式で $z^3 = \bar{z}$ を解く。(2) は実数解と非実数解を別々のグラフの交点として数え、非実数解が常に共役な 2 個、実数解が开区間内で 3 個になる条件を求める。

【解答】

(1) $a = 0$ のとき $z^3 = \bar{z}$ である。 $z = 0$ は解である。 $z \neq 0$ なら両辺に z を掛けて

$$z^4 = |z|^2$$

を得る。 $z = re^{i\phi}$ ($r > 0$) とすると $r^4 e^{4i\phi} = r^2$ だから $r = 1$, $e^{4i\phi} = 1$ である。よって

$$z = 1, i, -1, -i$$

であり、 $z = 0$ と合わせて 5 個である。

(2) $z = x + yi$ として実部・虚部を比較すると

$$y(3x^2 - y^2 + 1) = 0.$$

$y = 0$ では

$$a = x^3 - x.$$

一方 $y \neq 0$ では $y^2 = 3x^2 + 1$ であり、実部へ代入して

$$a = -8x^3 - 4x$$

を得る。右辺を $k(x)$ とすると、 $x_2 > x_1$ に対して

$$k(x_2) - k(x_1) = -(x_2 - x_1)\{8(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + 4\} < 0.$$

したがって任意の a に対して x はただ 1 つ、対応する y は正負の 2 つであり、非実数解は常に 2 個である。

実数解が 3 個になる条件を調べる。 $h(x) = x^3 - x$ の極大値・極小値は

$$h\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

である。したがって直線 $y = a$ がグラフと異なる 3 点で交わる条件は

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}} < a < \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

このとき実数解 3 個と非実数解 2 個を合わせてちょうど 5 個になる。

【総評】 難度 7, 計算量 6。目安時間は 31 分。虚部比較から $y = 0$ と $y \neq 0$ に分けるところが最重要で、非実数解の個数が常に 2 個であることを単調性で示すと全体像が明確になる。最後は 3 次関数 $x^3 - x$ の極大・極小を使う標準問題だが、端点では重解が生じて実数解が 3 個にならないため、不等号は厳密な开区間になる。

【第 3 問】

$3 \leq k < n$ を満たす整数 n, k を考える。赤玉 k 個と青玉 $n - k$ 個が入った袋から 3 個を無作為に取り出すとき、赤玉 2 個、青玉 1 個となる確率を $p(n, k)$ とする。

(1) $p(n, k)$ を求めよ。

(2) n は 6 以上の 3 の倍数とする。 n を固定し、 $3 \leq k < n$ の範囲で k を動かすとき、 $p(n, k)$ の最大値と、そのときの k を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は全体 ${}_nC_3$ 通りのうち、赤を 2 個、青を 1 個選ぶ場合を組合せで数える。(2) は n を固定すると分母が一定なので、 ${}_kC_2(n - k)$ 、すなわち $k(k - 1)(n - k)$ を最大化すればよい。連続変数の微分ではなく、 $F(k + 1) - F(k)$ の符号で整数 k の増減を調べ、 $n = 3m$ のとき最大が $k = 2m$ であることを示す。最後の最大値は組合せ式へ代入して整理する。

【解答】

(1) 全体から 3 個を取り出す方法は ${}_nC_3$ 通りである。赤玉 2 個、青玉 1 個となる取り出し方は、赤玉 k 個から 2 個、青玉 $n - k$ 個から 1 個を選ぶので ${}_kC_2(n - k)$ 通りである。したがって $p(n, k) = \frac{{}_kC_2(n - k)}{{}_nC_3}$ である。

(2) n を固定すると、分母 ${}_nC_3$ は一定である。よって $F(k) = k(k - 1)(n - k)$ を最大にすればよい。

差を計算すると $F(k + 1) - F(k) = k\{(k + 1)(n - k - 1) - (k - 1)(n - k)\} = k(2n - 1 - 3k)$ である。ここで $n = 3m$ とおくと $F(k + 1) - F(k) = k(6m - 1 - 3k)$ である。したがって $k \leq 2m - 1$ では増加し、 $k \geq 2m$ では減少する。条件 $3 \leq k < n$ の範囲で最大となるのは $k = 2m = \frac{2n}{3}$ のときである。

このとき最大値は $p(n, 2n/3) = \frac{{}_{2m}C_2m}{{}_{3m}C_3}$ である。これを整理すると

$$\frac{{}_{2m}C_2m}{{}_{3m}C_3} = \frac{2m(2m - 1)}{(3m - 1)(3m - 2)} = \frac{2n(2n - 3)}{9(n - 1)(n - 2)}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

確率の分子を $F(k) = k(k - 1)(n - k)$ とし、隣接する 2 項の比を 1 と比較する。差分展開を避け、増加から減少へ切り替わる整数を比の不等式で特定する。

【解答】

(1) 全事象は ${}_nC_3$ 通り、有利な取り出し方は ${}_kC_2(n - k)$ 通りなので

$$p(n, k) = \frac{{}_kC_2(n - k)}{{}_nC_3}.$$

(2) $n = 3m$ とする。分母は一定なので

$$F(k) = k(k - 1)(3m - k)$$

を最大化すればよい。 $3 \leq k < 3m - 1$ で

$$\frac{F(k + 1)}{F(k)} = \frac{(k + 1)(3m - k - 1)}{(k - 1)(3m - k)}.$$

この比が 1 以上である条件は

$$(k + 1)(3m - k - 1) \geq (k - 1)(3m - k) \iff k \leq 2m - 1$$

である。したがって $F(k)$ は $k = 2m$ まで増加し、その後減少する。最大となるのは

$$k = 2m = \frac{2n}{3}$$

である。最大値は

$$\frac{{}_{2m}C_2m}{{}_{3m}C_3} = \frac{2m(2m - 1)}{(3m - 1)(3m - 2)} = \frac{2n(2n - 3)}{9(n - 1)(n - 2)}.$$

【総評】 難度 5, 計算量 5。目安時間は 24 分。確率式そのものは基本的な組合せだが, 最大化では k が整数であるため差分で増減を調べるのが安全である。最大位置は直感的に $2n/3$ 付近だが, $F(k+1) - F(k)$ の符号を示すことで端点や隣の整数との比較が不要になる。最大値の代入では係数の整理を誤りやすく, 正しくは $\frac{2n(2n-3)}{9(n-1)(n-2)}$ である。

【第 4 問】

n を負でない整数とする。

(1)

$$2x + 2y + z = n$$

を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, $n = 4$ と $n = 5$ のそれぞれの場合に求めよ。

(2) 同じ等式を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, n を用いて表せ。

(3)

$$2x + 2y + z \leq n$$

を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, n を用いて表せ。

▶ 解法 1

【方針】

$x + y = r$ とおくと, 等式 $2x + 2y + z = n$ では $z = n - 2r$ が決まり, (x, y) の個数は $r + 1$ 通りである。したがって r の範囲を $0 \leq r \leq \lfloor n/2 \rfloor$ として和を取る。(3) は (2) で得た等式の場合の個数を 0 から n まで足し上げ, n の偶奇で整理する。別解として, 不等式に余りの変数を入れて $2x + 2y + z + w = n$ を直接数える方法もある。

【解答】

(1) $x + y = r$ とおくと, 等式は $2r + z = n$ となる。 r が決まれば $z = n - 2r$ であり, (x, y) は $(x, y) = (0, r), (1, r-1), \dots, (r, 0)$ の $r + 1$ 通りである。 $n = 4$ のときは $r = 0, 1, 2$ であるから $1 + 2 + 3 = 6$ 通りである。 $n = 5$ のときは $r = 0, 1, 2$ であるから $1 + 2 + 3 = 6$ 通りである。

(2) $m = \lfloor n/2 \rfloor$ とおくと, r は $0, 1, 2, \dots, m$ を動く。したがって総数は $\sum_{r=0}^m (r+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ である。すなわち, $n = 2m$ または $n = 2m + 1$ のとき, いずれも $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ 通りである。

(3) (2) の結果を, 右辺が $0, 1, 2, \dots, n$ の場合について足し上げる。 $n = 2m$ のとき, 右辺 $2r$ の場合と $2r + 1$ の場合の個数は同じ $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ である。よって総数は

$$\sum_{r=0}^m \frac{(r+1)(r+2)}{2} + \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

である。ここで $\sum_{r=0}^m \frac{(r+1)(r+2)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$ を用いると, 総数は $\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$ である。

$n = 2m + 1$ のときは, $0, 1, 2, 3, \dots, 2m, 2m + 1$ の各組で個数が等しいので $2 \sum_{r=0}^m \frac{(r+1)(r+2)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

不等式には余りを表す変数 w を加え、等式 $2x + 2y + z + w = n$ として直接数える。 $x + y = r$ を固定すれば、 (x, y) と (z, w) の個数の積になる。

【解答】

(1), (2) $x + y = r$ とすると $z = n - 2r$ であり、 (x, y) は $r + 1$ 通りである。よって $m = \lfloor n/2 \rfloor$ として

$$\sum_{r=0}^m (r+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

特に $n = 4, 5$ ではともに $m = 2$ なので 6 通りである。

(3) 余り $w \geq 0$ を導入すると

$$2x + 2y + z \leq n \iff 2x + 2y + z + w = n.$$

$x + y = r$ を固定すると、 (x, y) は $r + 1$ 通り、 (z, w) は $n - 2r + 1$ 通りである。したがって総数は

$$S_n = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (r+1)(n-2r+1).$$

$n = 2m$ なら

$$S_{2m} = \sum_{r=0}^m (r+1)(2m-2r+1) = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

$n = 2m + 1$ なら

$$S_{2m+1} = 2 \sum_{r=0}^m (r+1)(m-r+1) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}.$$

【総評】 難度 4, 計算量 5。目安時間は 20 分。 x と y が同じ係数で現れるので、 $x + y = r$ とまとめるのが最短である。(2) は床関数で一度まとめ、最後に偶奇で表すと見通しがよい。(3) では等式の場合を単純に足せばよいが、偶数番目と奇数番目が同数になる構造を使うと計算が軽くなる。直接数える別解も有効で、余り変数 w を入れる発想は不等式の数え上げでよく使える。