

入 学 試 験 問 題



数 学

東 北 大 学 2017 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面において、原点を中心とする半径 1 の円を C とする。 a, b を実数とし、放物線

$$D: y = x^2 + ax + b$$

の頂点 (p, q) が円 C 上にあるとする。

(1)

$$(p, q) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表すとき、 a, b を θ を用いて表せ。

(2) 放物線 D の $x = 1$ における接線が円 C の周を 2 等分するような組 (a, b) をすべて求めよ。

(3) 放物線 D の接線で円 C の周を 2 等分するものが、ただ一つ存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。

第 2 問

$23a + 7b = 0$ を満たす実数 a, b ($a > 0$) に対し, 関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_x^{2x+1} \sqrt[3]{at+b} \, dt$$

で定める。 $F(x)$ の最小値と, そのときの x の値を求めよ。

第 3 問

実数 θ の関数

$$f(\theta) = \frac{1}{2 + \cos \theta} + \frac{1}{2 + \sin \theta}$$

を考える。

(1) $x = \cos \theta + \sin \theta$ とおくとき, $f(\theta)$ を x を用いて表せ。

(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

第 4 問

1 辺の長さが 1 の立方体 $ABCD-EFGH$ の辺上を動く点 M を考える。規則は次の通りである。

(i) 時刻 0 で M は頂点 A にある。

(ii) 各辺上での速さは 1 で、辺の途中では後戻りしない。

(iii) 各頂点では、その頂点を端点とする 3 本の辺から 1 本を確率

$$\frac{1}{3}$$

で選び、次の頂点へ移動し続ける。

(1) 時刻 4, 5 で M が頂点 A にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 負でない整数 n について、時刻 n で M が頂点 A にある確率を n を用いて表せ。

(3) 時刻 8 で M が頂点 A にあるという条件のもとで、その時刻までに立方体のすべての頂点を通る条件付き確率を求めよ。

第 5 問

n を負でない整数とする。

(1)

$$2x + 2y + z = n$$

を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, $n = 4$ と $n = 5$ のそれぞれの場合に求めよ。

(2) 同じ等式を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, n を用いて表せ。

(3)

$$2x + 2y + z \leq n$$

を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, n を用いて表せ。

第 6 問

座標空間で、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面上に 3 点

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, b, c\right), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1)$$

をとる。ここで b, c は $bc < 0$ を満たす実数とする。原点 O を通り、 $\overrightarrow{OA}$ に垂直な平面を α とする。 B, C から α に下ろした垂線をそれぞれ BD, CE とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE}$ と、大きさ $|\overrightarrow{OD}|, |\overrightarrow{OE}|$ を b, c を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OE}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。 $\cos \theta$ の最大値と、最大値を与える点 A の座標を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)