

東北大学 2017 年度 理系 (後期)

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面において、原点を中心とする半径 1 の円を C とする。 a, b を実数とし、放物線

$$D: y = x^2 + ax + b$$

の頂点 (p, q) が円 C 上にあるとする。

(1)

$$(p, q) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表すとき、 a, b を θ を用いて表せ。

(2) 放物線 D の $x = 1$ における接線が円 C の周を 2 等分するような組 (a, b) をすべて求めよ。

(3) 放物線 D の接線で円 C の周を 2 等分するものが、ただ一つ存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

放物線を頂点形 $y = (x - p)^2 + q$ で書き、 (p, q) が単位円上にあることを使う。円周を 2 等分する直線は原点を通る直線なので、(2) では $x = 1$ での接線が原点を通る条件を立てる。(3) では接点の x 座標を u 、 $v = u - p$ と置き、一般の接線が原点を通る条件を v の 2 次方程式にする。ただ一つ存在する条件は判別式 0 である。

【解答】

(1) 頂点を (p, q) とすると、放物線は $y = (x - p)^2 + q = x^2 - 2px + p^2 + q$ である。したがって $a = -2p$ 、 $b = p^2 + q$ である。 $(p, q) = (\cos \theta, \sin \theta)$ より $a = -2\cos \theta$ 、 $b = \cos^2 \theta + \sin \theta$ である。

(2) 円 C の周を 2 等分する直線は、円の中心である原点を通る直線である。 $x = 1$ における接線を求める。 $y = (x - p)^2 + q$ の導関数は $2(x - p)$ なので、接線は $y = 2(1 - p)(x - 1) + (1 - p)^2 + q$ である。これが原点を通る条件は $0 = -2(1 - p) + (1 - p)^2 + q$ であり、整理して $p^2 + q = 1$ となる。

一方、頂点は単位円上にあるから $p^2 + q^2 = 1$ である。 $q = 1 - p^2$ を代入すると $p^2 + (1 - p^2)^2 = 1$ すなわち $p^2(p^2 - 1) = 0$ である。よって $(p, q) = (0, 1), (1, 0), (-1, 0)$ である。これを $a = -2p$ 、 $b = p^2 + q$ に代入して $(a, b) = (0, 1), (-2, 1), (2, 1)$ を得る。

(3) 接点の x 座標を u とする。接線は $y = 2(u - p)(x - u) + (u - p)^2 + q$ である。これが原点を通る条件は $0 = -2u(u - p) + (u - p)^2 + q$ である。 $v = u - p$ とおくと $u = v + p$ なので $0 = -2(v + p)v + v^2 + q$ すなわち $v^2 + 2pv - q = 0$ を得る。

原点を通る接線がただ一つ存在するには、この v の 2 次方程式が重解をもてばよい。したがって判別式より $(2p)^2 + 4q = 0$ すなわち $p^2 + q = 0$ である。よって $q = -p^2$ であり、さらに $p^2 + q^2 = 1$ から $p^2 + p^4 = 1$ を得る。 $X = p^2$ とおくと $X^2 + X - 1 = 0$ であり、 $X \geq 0$ より $p^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ である。このとき $b = p^2 + q = 0$ 、 $a = -2p$ だから、求める組は

$$(a, b) = \left(2\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, 0 \right), \quad \left(-2\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, 0 \right)$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

放物線 $y = x^2 + ax + b$ の接点を u とすると、接線の y 切片は $b - u^2$ である。原点を通る条件が直ちに $u^2 = b$ となるため、接線の本数を平方根の個数として判定する。

【解答】

(1) 頂点は

$$p = -\frac{a}{2}, \quad q = b - \frac{a^2}{4}$$

である。したがって $(p, q) = (\cos \theta, \sin \theta)$ より

$$a = -2 \cos \theta, \quad b = \cos^2 \theta + \sin \theta.$$

(2) 接点の x 座標を u とすると接線は

$$y = (2u + a)x + b - u^2$$

である。円周を 2 等分するには原点を通ればよいので、条件は $b = u^2$ である。 $u = 1$ では $b = 1$ 。頂点が単位円上にある条件へ代入すると

$$\frac{a^2}{4} + \left(1 - \frac{a^2}{4}\right)^2 = 1$$

より $a = 0, \pm 2$ を得る。したがって

$$(a, b) = (0, 1), (2, 1), (-2, 1).$$

(3) 原点を通る接線の本数は、方程式 $u^2 = b$ の実数解の個数に等しい。これが 1 個であるための必要十分条件は $b = 0$ である。このとき頂点は

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right)$$

なので、単位円上の条件は

$$\frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{16} = 1.$$

$X = a^2/4$ とおけば $X^2 + X - 1 = 0$ だから

$$X = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

よって

$$(a, b) = \left(2\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, 0\right), \left(-2\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, 0\right).$$

【総評】 難度 6, 計算量 6。目安時間は 28 分。「円周を 2 等分する直線」は原点を通る直線である, という幾何的読み替えが最初の関門である。(2) は接線の式を原点に代入すればよいが, (3) では接点を動かすため, 接点座標 u と頂点からのずれ $v = u - p$ を分けると式が簡単になる。ただ一つの接線を「判別式 0」と結びつけるところまで書くと, 方針が明確な答案になる。

【第 2 問】

$23a + 7b = 0$ を満たす実数 a, b ($a > 0$) に対し、関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_x^{2x+1} \sqrt[3]{at+b} dt$$

で定める。 $F(x)$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

条件 $23a + 7b = 0$ から $b = -23a/7$ とし、積分の上端・下端が x に依存する関数として微分する。 $F'(x) = 0$ は実数の 3 乗根の単調性を使って 3 乗して解く。さらに $F'(x)$ の符号は、両辺を 3 乗した差の符号と一致するため、 $x = 1$ で最小になることを示せる。最小値は $t - 23/7$ をそのまま積分し、負の範囲での 3 乗根の扱いに注意して評価する。

【解答】

条件 $23a + 7b = 0$ より $b = -\frac{23}{7}a$ である。したがって $at + b = a\left(t - \frac{23}{7}\right)$ である。

上端、下端が x に依存する定積分を微分すると $F'(x) = 2\{a(2x+1) + b\}^{1/3} - \{ax + b\}^{1/3}$ である。 $a > 0$ を用いて

$$F'(x) = \sqrt[3]{a} \left\{ 2 \left(2x - \frac{16}{7} \right)^{1/3} - \left(x - \frac{23}{7} \right)^{1/3} \right\}$$

と書ける。 $F'(x) = 0$ は $2 \left(2x - \frac{16}{7} \right)^{1/3} = \left(x - \frac{23}{7} \right)^{1/3}$ である。両辺を 3 乗して $8 \left(2x - \frac{16}{7} \right) = x - \frac{23}{7}$ を得る。整理すると $15x = 15$ より $x = 1$ である。

また、実数 U, V について $U - V$ と $U^3 - V^3$ の符号は一致する。したがって $F'(x)$ の符号は $8 \left(2x - \frac{16}{7} \right) - \left(x - \frac{23}{7} \right) = 15(x - 1)$ の符号と一致する。よって $F(x)$ は $x < 1$ で減少し、 $x > 1$ で増加するので、最小値は $x = 1$ にとる。

最小値は

$$F(1) = \int_1^3 \left\{ a \left(t - \frac{23}{7} \right) \right\}^{1/3} dt = \sqrt[3]{a} \int_1^3 \left(t - \frac{23}{7} \right)^{1/3} dt$$

である。よって

$$F(1) = \frac{3\sqrt[3]{a}}{4} \left[\left(t - \frac{23}{7} \right)^{4/3} \right]_1^3$$

となる。 $1 - 23/7 = -16/7$, $3 - 23/7 = -2/7$ より

$$F(1) = \frac{3\sqrt[3]{a}}{4} \left\{ \left(\frac{2}{7} \right)^{4/3} - \left(\frac{16}{7} \right)^{4/3} \right\} = -\frac{45}{14} \sqrt[3]{\frac{2a}{7}}$$

である。

したがって、最小値は $-\frac{45}{14} \sqrt[3]{\frac{2a}{7}}$ であり、そのとき $x = 1$ である。

▶ 解法 2

【方針】

実数全体で使える原始関数 $H(u) = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{u})^4$ を導入し、まず $F(x)$ を端点値の差として明示する。その式を微分して増減を判定する。

【解答】

$b = -23a/7$ である。実数 u に対して

$$H(u) = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{u})^4$$

とおくと $H'(u) = \sqrt[3]{u}$ である。したがって

$$F(x) = \sqrt[3]{a} \left\{ H\left(2x - \frac{16}{7}\right) - H\left(x - \frac{23}{7}\right) \right\}.$$

これを微分して

$$F'(x) = \sqrt[3]{a} \left\{ 2\sqrt[3]{2x - \frac{16}{7}} - \sqrt[3]{x - \frac{23}{7}} \right\}.$$

$F'(x) = 0$ の両辺を 3 乗すると

$$8\left(2x - \frac{16}{7}\right) = x - \frac{23}{7},$$

よって $x = 1$ である。また 3 乗関数は単調増加なので、 $F'(x)$ の符号は

$$8\left(2x - \frac{16}{7}\right) - \left(x - \frac{23}{7}\right) = 15(x - 1)$$

の符号に一致する。したがって $x = 1$ で最小となる。

このとき

$$\begin{aligned} F(1) &= \sqrt[3]{a} \left\{ H\left(-\frac{2}{7}\right) - H\left(-\frac{16}{7}\right) \right\} \\ &= \frac{3\sqrt[3]{a}}{4} \left\{ \left(\frac{2}{7}\right)^{4/3} - \left(\frac{16}{7}\right)^{4/3} \right\} \\ &= -\frac{45}{14} \sqrt[3]{\frac{2a}{7}}. \end{aligned}$$

よって最小値は $-\frac{45}{14} \sqrt[3]{\frac{2a}{7}}$ 、そのとき $x = 1$ である。

【総評】 難度 6, 計算量 5。目安時間は 27 分。変数端点をもつ定積分の微分と、実数の 3 乗根の単調性を正しく扱う問題である。 $F'(x) = 0$ を 3 乗するだけでなく、その後に符号変化を確認して最小であることを述べる必要がある。最小値の計算では積分区間全体で $t - 23/7 < 0$ なので、3 乗根の符号と $(\cdot)^{4/3}$ の扱いを落ち着いて処理したい。

【第 3 問】

実数 θ の関数

$$f(\theta) = \frac{1}{2 + \cos \theta} + \frac{1}{2 + \sin \theta}$$

を考える。

(1) $x = \cos \theta + \sin \theta$ とおくとき、 $f(\theta)$ を x を用いて表せ。

(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$x = \cos \theta + \sin \theta$ とおき、 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ から $\sin \theta \cos \theta$ を x で表す。 x の範囲は $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ である。得られた 1 変数関数を微分し、区間内の臨界点と両端の値を比較して最大値・最小値を決める。

【解答】

(1) $x = \cos \theta + \sin \theta$ とおくと

$$x^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

である。したがって $\sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2}$ である。

よって

$$f(\theta) = \frac{1}{2 + \cos \theta} + \frac{1}{2 + \sin \theta} = \frac{4 + \sin \theta + \cos \theta}{(2 + \cos \theta)(2 + \sin \theta)}$$

であり、分母は

$$4 + 2(\sin \theta + \cos \theta) + \sin \theta \cos \theta = 4 + 2x + \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{x^2 + 4x + 7}{2}$$

である。したがって $f(\theta) = \frac{2(x + 4)}{x^2 + 4x + 7}$ である。

(2) $x = \sin \theta + \cos \theta$ の範囲は $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ である。ここで $g(x) = \frac{2(x + 4)}{x^2 + 4x + 7}$ とおく。微分すると

$$g'(x) = \frac{2(x^2 + 4x + 7) - 2(x + 4)(2x + 4)}{(x^2 + 4x + 7)^2} = -\frac{2(x^2 + 8x + 9)}{(x^2 + 4x + 7)^2}$$

である。 $x^2 + 8x + 9 = 0$ の解は $x = -4 \pm \sqrt{7}$ であり、区間 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ に入るのは $x = -4 + \sqrt{7}$ だけである。導関数の符号から、 $g(x)$ はこの点で最大となる。最大値は $g(-4 + \sqrt{7}) = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}$ である。

最小値は端点で比較する。 $g(-\sqrt{2}) > g(\sqrt{2})$ であるから、最小値は $x = \sqrt{2}$ のときであり、 $g(\sqrt{2}) = \frac{2(4 + \sqrt{2})}{9 + 4\sqrt{2}} = \frac{8 - 2\sqrt{2}}{7}$ である。

したがって、最大値は $\frac{2 + \sqrt{7}}{3}$ 最小値は $\frac{8 - 2\sqrt{2}}{7}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

(1) で得た有理式について、最大値は値 y を固定した 2 次方程式の判別式から上限を出す。最小値は右端 $x = \sqrt{2}$ での値との差を因数分解し、区間全体で非負になることを示す。

【解答】

(1) $x = \sin \theta + \cos \theta$ とすると

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{x^2 - 1}{2}$$

であるから

$$f(\theta) = \frac{2(x+4)}{x^2+4x+7}, \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

(2) $y = \frac{2(x+4)}{x^2+4x+7}$ とおくと

$$yx^2 + (4y-2)x + 7y-8 = 0.$$

実数 x をもつための必要条件は判別式が非負、すなわち

$$(4y-2)^2 - 4y(7y-8) = -4(3y^2 - 4y - 1) \geq 0.$$

したがって

$$y \leq \frac{2+\sqrt{7}}{3}.$$

等号のときの重解は $x = -4 + \sqrt{7}$ で、これは所定の区間内にある。よって最大値は $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ である。

最小値の候補として右端の値

$$m = g(\sqrt{2}) = \frac{8-2\sqrt{2}}{7}$$

を取る。直接因数分解すると

$$g(x) - m = \frac{(-8-2\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2}/2)}{(9+4\sqrt{2})(x^2+4x+7)}.$$

区間 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ では右辺は非負で、等号は $x = \sqrt{2}$ のときに限る。したがって最小値は

$$\frac{8-2\sqrt{2}}{7}$$

である。

【総評】 難度 5, 計算量 5。目安時間は 24 分。 $\sin \theta + \cos \theta$ でまとめると、分母に出る $\sin \theta \cos \theta$ も同じ文字で処理できる。最大・最小は x の範囲 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ を忘れず、臨界点が区間内に 1 つだけあることを確認するのが大切である。最小値は臨界点ではなく端点 $x = \sqrt{2}$ で出るため、端点比較を省かないこと。

【第 4 問】

1 辺の長さが 1 の立方体 $ABCD-EFGH$ の辺上を動く点 M を考える。規則は次の通りである。

- (i) 時刻 0 で M は頂点 A にある。
- (ii) 各辺上での速さは 1 で、辺の途中では後戻りしない。
- (iii) 各頂点では、その頂点を端点とする 3 本の辺から 1 本を確率

$$\frac{1}{3}$$

で選び、次の頂点へ移動し続ける。

- (1) 時刻 4, 5 で M が頂点 A にある確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 負でない整数 n について、時刻 n で M が頂点 A にある確率を n を用いて表せ。
- (3) 時刻 8 で M が頂点 A にあるという条件のもとで、その時刻までに立方体のすべての頂点を通る条件付き確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

立方体の頂点を $(0,0,0)$ から $(1,1,1)$ までの 0,1 座標で表し、1 回の移動は 3 つの座標のうち 1 つを反転する操作と見る。時刻 n に A へ戻るには、各座標が偶数回ずつ反転されればよいので、3 種類の記号からなる長さ n の列で各記号の出現回数が偶数のものを数える。(3) は時刻 8 で全頂点を通るなら、 A 以外の 7 頂点をちょうど 1 回ずつ通るハミルトン閉路になるため、反転記号列の形を数える。

【解答】

頂点 A を $(0,0,0)$ とし、隣り合う頂点への移動を、3 つの座標のうち 1 つを反転する操作と考える。各時刻で 3 本の辺を等確率に選ぶので、長さ n の移動列は全部で 3^n 通りである。

(1), (2) 時刻 n に A へ戻るための条件は、3 つの座標がそれぞれ偶数回反転されることである。3 種類の記号の出現回数がすべて偶数である長さ n の列数を N_n とする。偶奇を取り出す標準的な数え上げにより $N_n = \frac{1}{8} \{3^n + 3 \cdot 1^n + 3 \cdot (-1)^n + (-3)^n\}$ である。したがって、求める確率 P_n は

$$P_n = \frac{N_n}{3^n} = \frac{1}{8} \left\{ 1 + 3 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 3 \left(-\frac{1}{3} \right)^n + (-1)^n \right\}$$

である。

特に n が奇数のときは $P_n = 0$ であり、 n が偶数のときは $P_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 3^n}$ である。よって $P_4 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 3^4} = \frac{7}{27}$, $P_5 = 0$ である。

(3) 時刻 8 に A へ戻る移動列の総数は $3^8 P_8 = 1641$ である。

時刻 8 までにすべての頂点を通り、かつ時刻 8 に A にいるなら、時刻 0 と時刻 8 の A を除いて、残り 7 頂点をそれぞれ 1 回ずつ通る。つまり長さ 8 の閉路で全頂点を一周する場合を数えればよい。

反転する座標を 1, 2, 3 で表す。最初の 2 手は同じ座標を続けて選ぶと A に戻ってしまうので、相異なる i, j を選ぶ。残る座標を k とすると、全頂点を 1 回ずつ通って戻る列は、この最初の i, j に対して $ijikijik$, $ijkjijkj$ の 2 通りである。ここで空白を詰めて書けば、それぞれ (i, j, i, k, i, j, i, k) , (i, j, k, j, i, j, k, j) である。 (i, j) の選び方は $3 \cdot 2 = 6$ 通りなので、有利な移動列は $6 \cdot 2 = 12$ 通りである。

したがって求める条件付き確率は $\frac{12}{1641} = \frac{4}{547}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

頂点を A からの距離 0,1,2,3 の 4 層に分け, 層間の遷移数から A へ戻る経路数の漸化式を作る。偶数時刻の閉路数を 2 次漸化式で解き, (3) は 8 手のハミルトン閉路を数える。

【解答】

A から辺に沿った距離が r である頂点の層を L_r ($0 \leq r \leq 3$) とする。 L_r の各頂点からは r 本が L_{r-1} へ, $3-r$ 本が L_{r+1} へ向かう。

(1), (2) 長さ n で A から A へ戻る経路数を N_n とする。4 層の経路数について上の遷移を順に書き, 途中の 3 層を消去すると

$$N_{n+4} = 10N_{n+2} - 9N_n$$

を得る。初期値は

$$N_0 = 1, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 3, \quad N_3 = 0$$

である。奇数項はすべて 0 である。 $M_m = N_{2m}$ とおくと

$$M_{m+2} = 10M_{m+1} - 9M_m, \quad M_0 = 1, \quad M_1 = 3.$$

よって

$$M_m = \frac{9^m + 3}{4}.$$

全経路は $3^{2m} = 9^m$ 通りなので

$$P_{2m} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 9^m}, \quad P_{2m+1} = 0.$$

特に

$$P_4 = \frac{7}{27}, \quad P_5 = 0.$$

(3) A へ戻る 8 手の経路は

$$N_8 = \frac{9^4 + 3}{4} = 1641$$

通りである。8 手ですべての頂点を通るには, A 以外の 7 頂点を各 1 回通るハミルトン閉路でなければならない。最初の方角は 3 通り, 次は戻らない 2 通りであり, その各々に対して残りを巡る方法は 2 通りである。したがって有利な経路は

$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

通りで, 条件付き確率は

$$\frac{12}{1641} = \frac{4}{547}.$$

【総評】 難度 8, 計算量 7。目安時間は 35 分。立方体の対称性を 0,1 座標と反転回数に翻訳できるかが勝負である。A に戻る確率は, 3 種類の移動方向がすべて偶数回現れる列を数えると一気に求まる。(3) は条件付き確率なので分母を 3^8 にせず, A へ戻る 1641 通りに限定することが重要である。全頂点通過は 8 手で余裕がないため, A 以外を各 1 回ずつ通る閉路として 12 通りを数える。

【第 5 問】

n を負でない整数とする。

(1)

$$2x + 2y + z = n$$

を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, $n = 4$ と $n = 5$ のそれぞれの場合に求めよ。

(2) 同じ等式を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, n を用いて表せ。

(3)

$$2x + 2y + z \leq n$$

を満たす負でない整数 x, y, z の組の総数を, n を用いて表せ。

▶ 解法 1

【方針】

$x + y = r$ とおくと, 等式 $2x + 2y + z = n$ では $z = n - 2r$ が決まり, (x, y) の個数は $r + 1$ 通りである。したがって r の範囲を $0 \leq r \leq \lfloor n/2 \rfloor$ として和を取る。(3) は (2) で得た等式の場合の個数を 0 から n まで足し上げ, n の偶奇で整理する。別解として, 不等式に余りの変数を入れて $2x + 2y + z + w = n$ を直接数える方法もある。

【解答】

(1) $x + y = r$ とおくと, 等式は $2r + z = n$ となる。 r が決まれば $z = n - 2r$ であり, (x, y) は $(x, y) = (0, r), (1, r-1), \dots, (r, 0)$ の $r + 1$ 通りである。 $n = 4$ のときは $r = 0, 1, 2$ であるから $1 + 2 + 3 = 6$ 通りである。 $n = 5$ のときも $r = 0, 1, 2$ であるから $1 + 2 + 3 = 6$ 通りである。

(2) $m = \lfloor n/2 \rfloor$ とおくと, r は $0, 1, 2, \dots, m$ を動く。したがって総数は $\sum_{r=0}^m (r+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ である。すなわち,

$n = 2m$ または $n = 2m + 1$ のとき, いずれも $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ 通りである。

(3) (2) の結果を, 右辺が $0, 1, 2, \dots, n$ の場合について足し上げる。 $n = 2m$ のとき, 右辺 $2r$ の場合と $2r + 1$ の場合の個数は同じ $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ である。よって総数は

$$\sum_{r=0}^m \frac{(r+1)(r+2)}{2} + \sum_{r=0}^{m-1} \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

である。ここで $\sum_{r=0}^m \frac{(r+1)(r+2)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6}$ を用いると, 総数は $\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$ である。

$n = 2m + 1$ のときは, $0, 1, 2, 3, \dots, 2m, 2m + 1$ の各組で個数が等しいので $2 \sum_{r=0}^m \frac{(r+1)(r+2)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$

である。

▶ 解法 2

【方針】

不等式には余りを表す変数 w を加え、等式 $2x + 2y + z + w = n$ として直接数える。 $x + y = r$ を固定すれば、 (x, y) と (z, w) の個数の積になる。

【解答】

(1), (2) $x + y = r$ とすると $z = n - 2r$ であり、 (x, y) は $r + 1$ 通りである。よって $m = \lfloor n/2 \rfloor$ として

$$\sum_{r=0}^m (r+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

特に $n = 4, 5$ ではともに $m = 2$ なので 6 通りである。

(3) 余り $w \geq 0$ を導入すると

$$2x + 2y + z \leq n \iff 2x + 2y + z + w = n.$$

$x + y = r$ を固定すると、 (x, y) は $r + 1$ 通り、 (z, w) は $n - 2r + 1$ 通りである。したがって総数は

$$S_n = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (r+1)(n-2r+1).$$

$n = 2m$ なら

$$S_{2m} = \sum_{r=0}^m (r+1)(2m-2r+1) = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

$n = 2m + 1$ なら

$$S_{2m+1} = 2 \sum_{r=0}^m (r+1)(m-r+1) = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}.$$

【総評】 難度 4, 計算量 5。目安時間は 20 分。 x と y が同じ係数で現れるので、 $x + y = r$ とまとめるのが最短である。(2) は床関数で一度まとめ、最後に偶奇で表すと見通しがよい。(3) では等式の場合を単純に足せばよいが、偶数番目と奇数番目が同数になる構造を使うと計算が軽くなる。直接数える別解も有効で、余り変数 w を入れる発想は不等式の数え上げでよく使える。

【第 6 問】

座標空間で、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面上に 3 点

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, b, c\right), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1)$$

をとる。ここで b, c は $bc < 0$ を満たす実数とする。原点 O を通り、 $\overrightarrow{OA}$ に垂直な平面を α とする。 B, C から α に下ろした垂線をそれぞれ BD, CE とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE}$ と、大きさ $|\overrightarrow{OD}|, |\overrightarrow{OE}|$ を b, c を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OE}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。 $\cos \theta$ の最大値と、最大値を与える点 A の座標を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

平面 α は $\overrightarrow{OA}$ を法線にもつ原点通過平面である。したがって D, E は B, C をその法線方向に正射影した点であり、 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA}$ と表す。(2) は $b^2 + c^2 = 4/5$ と $bc < 0$ を使って $\cos \theta$ を b^2, c^2 で表し、積 $b^2 c^2$ が最大のときを調べる。

【解答】

(1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, b, c\right)$ とおく。 A は半径 1 の球面上にあるから $|\vec{a}| = 1$ である。また平面 α は原点を通り、 $\vec{a}$ に垂直な平面である。

点 B から α へ下ろした垂線の足 D は、 B を $\vec{a}$ 方向に正射影して引いた点である。 $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{a} = b$ だから $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - b\vec{a}$ である。同様に $\overrightarrow{OC} \cdot \vec{a} = c$ より $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} - c\vec{a}$ である。

したがって

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = (\overrightarrow{OB} - b\vec{a}) \cdot (\overrightarrow{OC} - c\vec{a}) = -bc$$

である。また

$$|\overrightarrow{OD}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - b^2 = 1 - b^2, \quad |\overrightarrow{OE}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 - c^2 = 1 - c^2$$

より

$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{1 - b^2}, \quad |\overrightarrow{OE}| = \sqrt{1 - c^2}$$

である。

(2) A が単位球面上にあるので $\frac{1}{5} + b^2 + c^2 = 1$ すなわち $b^2 + c^2 = \frac{4}{5}$ である。また $bc < 0$ より $-bc > 0$ である。したがって

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE}}{|\overrightarrow{OD}| |\overrightarrow{OE}|} = \frac{-bc}{\sqrt{(1 - b^2)(1 - c^2)}}$$

である。 $u = b^2$, $v = c^2$ とおくと $u + v = \frac{4}{5}$, $u > 0$, $v > 0$ であり,

$$\cos^2 \theta = \frac{uv}{(1 - u)(1 - v)} = \frac{uv}{1 - (u + v) + uv} = \frac{uv}{\frac{1}{5} + uv}$$

である。この式は uv が大きいほど大きくなる。和 $u + v = 4/5$ が一定なので, uv は $u = v = \frac{2}{5}$ のとき最大となる。

このとき $\cos \theta = \frac{2/5}{3/5} = \frac{2}{3}$ である。 $bc < 0$ より b, c の符号は反対でなければならない。したがって最大値を与える点 A は

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}} \right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}} \right)$$

であり, 最大値は $\frac{2}{3}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

単位法線から垂線の足を直接求める。(2) では $b^2 + c^2 = 4/5$ を三角関数で表し, $\cos \theta$ を $\sin 2\phi$ の増加関数へ変形する。

【解答】

(1) 単位法線を $\mathbf{n} = (1/\sqrt{5}, b, c)$ とする。平面 α は $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ で, $B \cdot \mathbf{n} = b$, $C \cdot \mathbf{n} = c$ だから

$$D = B - b\mathbf{n}, \quad E = C - c\mathbf{n}, \\ \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = -bc, \quad |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{1 - b^2}, \quad |\overrightarrow{OE}| = \sqrt{1 - c^2}.$$

(2) $b^2 + c^2 = 4/5$, $bc < 0$ である。一方の符号配置を

$$b = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos \phi, \quad c = -\frac{2}{\sqrt{5}} \sin \phi \quad (0 < \phi < \pi/2)$$

と表し, $s = \sin 2\phi$ とおく。このとき

$$-bc = \frac{2}{5}s, \quad (1 - b^2)(1 - c^2) = \frac{1}{5} + \frac{4}{25}s^2, \quad \cos \theta = \frac{2s}{\sqrt{5 + 4s^2}}.$$

$0 < s \leq 1$ で右辺は増加するから, 最大は $s = 1$, すなわち $b^2 = c^2 = 2/5$ のときである。よって

$$\max \cos \theta = \frac{2}{3}, \quad A = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \sqrt{\frac{2}{5}}, \mp \sqrt{\frac{2}{5}} \right).$$

【総評】 難度 7, 計算量 6。目安時間は 31 分。平面への正射影をベクトルで表せるかが中心である。 D, E の座標を直接求めるより, 法線方向成分を引く形にすると内積と長さが短く計算できる。(2) では $b^2 + c^2 = 4/5$ と $bc < 0$ を同時に使い, $\cos \theta$ が正であることを確認する。最後は和一定の積最大で $b^2 = c^2$ を得るが, 符号条件により 2 点に分かれる点まで書く必要がある。