

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2017 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

a, b を実数とする。曲線 C と直線 l を

$$C : y = |x^2 - 4|, \quad l : y = ax + b$$

で定める。

- (1) l が点 $(-2, 0)$ を通り, l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。
- (2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 (a, b) の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

第 2 問

A 君と B 君はそれぞれ、0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は、自分の箱から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競う。3 枚に 0 が含まれない場合の得点は 3 数の平均値、0 が含まれる場合の得点は残り 2 数の合計とする。

- (1) A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出し, しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。
- (2) A 君の得点が B 君の得点より大きいという条件のもとで, A 君の得点が整数でない条件付き確率を求めよ。

第 3 問

a, b, c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

(1) 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

が有理数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。

(2) 同じ 2 次方程式が少なくとも一つの整数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。

第 4 問

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において、辺 AB を $s : 1$ に内分する点を D 、辺 BC を $s : 3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。

(1)

$$\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

とするとき、 α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。 FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

第 5 問

α, β, γ を複素数とし，複素数 z について

$$z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \quad (*)$$

を考える。

(1) z は

$$(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$$

を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ とし， γ は負の実数とする。このとき，(*) を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α, β を用いて表せ。

第 6 問

a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする。

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} e^{ax} \cos bx \, dx,$$
$$J(a, b, c) = \int_0^{\pi/2} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$$

とおく。

- (1) $I(a, b)$ を求めよ。
- (2) $J(a, b, c)$ を $I(a, b + c)$ と $I(a, b - c)$ を用いて表せ。
- (3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\pi/2} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$$

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)