

東北大学 2017 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a, b を実数とする。曲線 C と直線 l を

$$C: y = |x^2 - 4|, \quad l: y = ax + b$$

で定める。

(1) l が点 $(-2, 0)$ を通り、 l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 (a, b) の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

C を $x \leq -2$, $-2 \leq x \leq 2$, $x \geq 2$ の 3 部分に分け、それぞれ $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 4$ として交点を数える。
(1) は $(-2, 0)$ を通るので $b = 2a$ とし、中央部分と右外側部分に現れる追加交点の有効範囲を調べる。(2) は共有点数が 3 になる仕組みを、中央弧への内点接線で 1 点が重なる場合と、尖点を通して左右の式の交点が重なる場合に分類する。端点では重複数が変わるため、不等号の開閉を必ず確認する。

【解答】

曲線 C は

$$y = \begin{cases} x^2 - 4 & (x \leq -2), \\ 4 - x^2 & (-2 \leq x \leq 2), \\ x^2 - 4 & (x \geq 2) \end{cases}$$

である。

(1) 直線 l が $(-2, 0)$ を通るので $0 = -2a + b$, $b = 2a$ である。

中央部分 $-2 \leq x \leq 2$ との交点は $4 - x^2 = ax + 2a$ すなわち $x^2 + ax + 2a - 4 = 0$ で決まる。この方程式は $x = -2$ を解にもち、もう一つの解は $x = 2 - a$ である。これが中央部分の内部にある条件は $-2 < 2 - a < 2$ より $0 < a < 4$ である。

外側部分との交点は $x^2 - 4 = ax + 2a$ すなわち $x^2 - ax - 2a - 4 = 0$ で決まる。この方程式も $x = -2$ を解にもち、もう一つの解は $x = a + 2$ である。これが右側部分 $x > 2$ にある条件は $a > 0$ である。

したがって、 $(-2, 0)$ のほかに中央部分の内部で 1 点、右側部分で 1 点をもつための条件は $0 < a < 4$ である。よって $b = 2a$, $0 < a < 4$ である。

(2) 共有点がちょうど 3 個になるのは、4 個になり得る交点のうち 1 組が重なる場合である。重なり方は、中央部分 $y = 4 - x^2$ への接線になる場合、または尖点 $(-2, 0), (2, 0)$ を通る場合に分けられる。

まず中央部分の内点 $x = t$ における接線を考える。 $y = 4 - x^2$ の接線の傾きは $-2t$ であるから $a = -2t$, $b = 4 + t^2$ である。 $-2 < t < 2$ より $|a| < 4$ であり、 $t = -a/2$ を代入して $b = 4 + \frac{a^2}{4}$, $-4 < a < 4$ を得る。このとき中央部分では接点が 1 個に重なり、外側部分に左右 1 個ずつ交点があるので、共有点はちょうど 3 個である。

次に左の尖点 $(-2, 0)$ を通る場合は、(1) と同様に $b = 2a$, $0 < a < 4$ である。

右の尖点 $(2, 0)$ を通る場合は $b = -2a$ である。中央部分では $x = 2$ のほかに $x = -a - 2$, 外側部分では $x = 2$ のほかに $x = a - 2$ が現れる。これらがそれぞれ中央の内部と左外側に入る条件は $-4 < a < 0$ である。したがって $b = -2a$, $-4 < a < 0$ を得る。

以上より、求める軌跡は $b = 4 + \frac{a^2}{4}$ ($-4 < a < 4$), $b = 2a$ ($0 < a < 4$), $b = -2a$ ($-4 < a < 0$) の 3 部分である。

▶ 解法 2

【方針】

外側と中央の交点方程式をそれぞれ $Q_+(x) = 0$, $Q_-(x) = 0$ と置く。共有点が 3 個になる退化を, 中央部分で判別式が 0 になる場合と, 両方の式が端点 $x = \pm 2$ を共有する場合に代数的に分類する。

【解答】

外側 $y = x^2 - 4$ および中央 $y = 4 - x^2$ との交点方程式を

$$Q_+(x) = x^2 - ax - b - 4 = 0, \quad Q_-(x) = x^2 + ax + b - 4 = 0$$

とおく。ただし Q_+ の根は $|x| \geq 2$, Q_- の根は $|x| \leq 2$ のものだけを採用する。

(1) $(-2, 0)$ を通るので $b = 2a$ である。このとき

$$Q_-(x) = (x+2)(x+a-2), \quad Q_+(x) = (x+2)(x-a-2).$$

端点 $x = -2$ のほか, 中央部分に $x = 2 - a$, 右外側に $x = a + 2$ が現れる条件は $0 < a < 4$ である。よって

$$b = 2a, \quad 0 < a < 4.$$

(2) 通常は交点が偶数個ずつ現れるので, 3 個になるには次のどちらかの退化が必要である。

中央部分で接する場合, Q_- の判別式が 0 だから

$$a^2 - 4(b-4) = 0, \quad b = 4 + \frac{a^2}{4}.$$

重根 $x = -a/2$ が中央の内点にある条件は $-4 < a < 4$ である。

端点 $x = -2$ を共有する場合は $b = 2a$ であり, (1) から $0 < a < 4$ である。端点 $x = 2$ を共有する場合は対称性により

$$b = -2a, \quad -4 < a < 0.$$

以上より軌跡は

$$\begin{aligned} b &= 4 + \frac{a^2}{4} \quad (-4 < a < 4), \\ b &= 2a \quad (0 < a < 4), \quad b = -2a \quad (-4 < a < 0) \end{aligned}$$

の 3 部分である。

【総評】 難度 7, 計算量 7。目安時間は 32 分。絶対値グラフの端点 $x = \pm 2$ では 2 つの式が同じ点を表すため, 方程式の解の個数をそのまま足すと過大計数になる。接線で交点が重なる場合と尖点で重なる場合を分け, 端点 $a = \pm 4, 0$ を除く理由まで書けるかが得点差になる。図示では放物線状の弧と 2 本の線分状の軌跡を, 開区間で示すことが重要である。

【第 2 問】

A 君と B 君はそれぞれ、0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は、自分の箱から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競う。3 枚に 0 が含まれない場合の得点は 3 数の平均値、0 が含まれる場合の得点は残り 2 数の合計とする。

(1) A 君、B 君の少なくとも一方が 0 を取り出し、しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいという条件のもとで、A 君の得点が整数でない条件付き確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

文系第 4 問と同じ得点分布を作り、(1) は双方 3 点かつ少なくとも一方が 0 を含む場合を数える。(2) は条件付き確率なので、分母には A 君が勝つ全組数を置く。分子は、そのうち A 君の得点が非整数である組数であり、非整数得点ごとに B 君の累積個数を掛けて数える。

【解答】

1 人の取り出し方は ${}_6C_3 = 20$ 通りである。得点分布は

r	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{11}{3}$	4	5	6	7	8	9
$N(r)$	1	1	2	3	2	1	2	2	2	2	1	1

である。

(1) 得点が 3 点になる取り出し方は $\{0, 1, 2\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ の 3 通りであり、このうち 0 を含むものは 1 通り、0 を含まないものは 2 通りである。双方が 3 点となる 3^2 通りから、双方とも 0 を含まない 2^2 通りを除くと、条件を満たす場合は $3^2 - 2^2 = 5$ 通りである。したがって確率は $\frac{5}{20^2} = \frac{1}{80}$ である。

(2) まず、A 君の得点が B 君の得点より大きい組数を数える。得点を小さい順に見て、その得点より小さい得点をもつ B 君の取り出し方の個数を累積すると、A 君が勝つ組数は $0 + 1 + 4 + 12 + 14 + 9 + 20 + 24 + 28 + 32 + 18 + 19 = 181$ である。

次に、このうち A 君の得点が整数でないものを数える。非整数得点 $7/3, 8/3, 10/3, 11/3$ に対して、B 君の得点がそれより小さい取り出し方の個数は順に 1, 2, 7, 9 である。よって分子は $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 9 = 28$ である。したがって求める条件付き確率は $\frac{28}{181}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

得点分布から同点となる組だけを数え、A 勝ちと B 勝ちの対称性で条件付き確率の分母を出す。分子は A の非整数得点 4 種類について、B の累積個数を掛ける。

【解答】

1 人の得点別の個数は

1, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1

である。

(1) 得点 3 の手は 3 通りで、0 を含まない手は 2 通りである。よって求める確率は

$$\frac{3^2 - 2^2}{20^2} = \frac{1}{80}.$$

(2) 2 人が同点となる組数は、各得点の個数の平方を足して

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 38$$

である。同点でない $400 - 38 = 362$ 組は、A 勝ちと B 勝ちが入れ替えにより同数だから、A が勝つ組数は

$$\frac{362}{2} = 181.$$

一方、A の得点が $7/3, 8/3, 10/3, 11/3$ となる手の個数は 1, 2, 2, 1 であり、それより低い B の手は 1, 2, 7, 9 通りである。したがって分子は

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 9 = 28.$$

よって条件付き確率は

$$\frac{28}{181}.$$

【総評】 難度 5, 計算量 5. 目安時間は 25 分. 条件付き確率の分母を 20^2 のままにしないことが最大の注意点である. 得点分布を表にしたあと, A が勝つ全組数を累積で 181 通りと数え, その中から A の非整数得点 28 通りを取り出す流れにすると, 文系版の設問との差もはっきりする. 分布表を作らずに手で場合分けすると, 得点 3 と得点 4 以上の 0 入りの手を落としやすい.

【第 3 問】

a, b, c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする.

(1) 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

が有理数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ.

(2) 同じ 2 次方程式が少なくとも一つの整数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

有理数解をもつ条件を判別式 $D = b^2 - 4ac$ が 0 以上の平方数であることに置き換える. a, c は 1 以上 7 以下で b とも相異なるため, b ごとに可能な $(a, c; D)$ を表で列挙する. (2) では (1) の候補について, 解の公式 $(-b \pm \sqrt{D})/(2a)$ の少なくとも一方が整数になるかを割り切れで調べ, 整数解をもたない 2 組だけを除く.

【解答】

(1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が有理数解をもつための必要十分条件は, 判別式 $D = b^2 - 4ac$ が 0 以上の平方数になることである. $a, c \geq 1$ なので, $b = 1, 2$ では条件を満たす相異なる a, b, c はない. $b = 3, 4, 5, 6, 7$ について調べる.

条件を満たす $(a, c; D)$ は次の通りである.

b	$(a, c; D)$	N_b
3	(1, 2; 1), (2, 1; 1)	2
4	(1, 3; 4), (3, 1; 4)	2
5	(1, 4; 9), (1, 6; 1), (2, 3; 1), (3, 2; 1), (4, 1; 9), (6, 1; 1)	6
6	(1, 5; 16), (2, 4; 4), (4, 2; 4), (5, 1; 16)	4
7	(1, 6; 25), (2, 3; 25), (2, 5; 9), (2, 6; 1), (3, 2; 25), (3, 4; 1), (4, 3; 1), (5, 2; 9), (6, 1; 25), (6, 2; 1)	10

よって, 有理数解をもつ組の総数は $2 + 2 + 6 + 4 + 10 = 24$ である.

(2) (1) で列挙した 24 組について, 解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ である. 少なくとも一つの整数解をもつかどうかは, $-b + \sqrt{D}$ または $-b - \sqrt{D}$ が $2a$ で割り切れるかで判定できる.

表の各組をこの条件で確認すると, 整数解をもたないものは $(a, b, c) = (6, 5, 1)$, $(a, b, c) = (6, 7, 2)$ の 2 組だけである. 実際, それぞれ $6x^2 + 5x + 1 = 0$ の解は $-1/2, -1/3$, $6x^2 + 7x + 2 = 0$ の解は $-1/2, -2/3$ であり, 整数解をもたない. 他の 22 組では, 解の公式の一方が負の整数になる.

したがって, 少なくとも一つの整数解をもつ組の総数は $24 - 2 = 22$ である.

▶ 解法 2

【方針】

判別式を d^2 と置き, $(b-d)(b+d) = 4ac$ を利用する. $u = (b-d)/2$, $v = (b+d)/2$ とすれば $u+v = b$, $uv = ac$ となるため, 小さい和の整数分割と積の因数分解で候補を整理できる.

【解答】

(1) 有理数解をもつとき, 判別式を d^2 ($d \geq 0$) と書ける. b と d は同じ偶奇なので

$$u = \frac{b-d}{2}, \quad v = \frac{b+d}{2}$$

は整数であり,

$$u+v = b, \quad uv = ac$$

を満たす. $a, c > 0$ より $u, v > 0$ である. 各 b について, 条件を満たす (u, v) と積 ac の因数分解を調べると

b	d	(u, v)	(a, c) の個数
3	1	(1, 2)	2
4	2	(1, 3)	2
5	1, 3	(2, 3), (1, 4)	4 + 2
6	2, 4	(2, 4), (1, 5)	2 + 2
7	1, 3, 5	(3, 4), (2, 5), (1, 6)	4 + 2 + 4

となる. ここでは a, b, c が相異なる条件を除外済みである. したがって総数は

$$2 + 2 + 6 + 4 + 10 = 24.$$

(2) 上の記号では 2 解は

$$x = -\frac{u}{a}, \quad x = -\frac{v}{a}$$

である. よって少なくとも一方が整数である条件は, $a \mid u$ または $a \mid v$ である. 24 組を同じ表で確認すると, この条件を満たさないのは

$$(a, b, c) = (6, 5, 1), \quad (6, 7, 2)$$

だけである. したがって整数解をもつ組は

$$24 - 2 = 22$$

通りである.

【総評】 難度 6, 計算量 7. 目安時間は 30 分. 範囲が 1 から 7 までと狭いので, 判別式を使った表の列挙が確実である. ただし「調べる」だけでは採点者が追えないため, b ごとの候補を明示するのがよい. (2) は有理数解と整数解の違いを問うており, 解の公式の分母 $2a$ で割り切れるかを確認する必要がある. 例外 2 組を具体的な解とともに示せば, 減点されにくい答案になる.

【第 4 問】

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において、辺 AB を $s:1$ に内分する点を D 、辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。

(1)

$$\overrightarrow{AF} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

とするとき、 α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。 FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

A を基準点にして、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の係数で D, E, F を表す。 F を直線 AE 上と直線 CD 上の 2 通りに置いて係数比較を行い、 α, β を s の式にする。(2) では AC を底辺と見れば、 F から AC までの距離は B から AC までの距離の α 倍である。したがって $s > 0$ で α を最大化し、微分または相加相乗平均で等号条件を確認する。

【解答】

(1) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ とおく。 D は AB を $s:1$ に内分し、 E は BC を $s:3$ に内分するから

$$\overrightarrow{AD} = \frac{s}{s+1} \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{s+3} \mathbf{b} + \frac{s}{s+3} \mathbf{c}$$

である。 F が AE 上にあることから

$$\overrightarrow{AF} = \lambda \left(\frac{3}{s+3} \mathbf{b} + \frac{s}{s+3} \mathbf{c} \right)$$

と書ける。また F が CD 上にあることから $\overrightarrow{AF} = (1-\mu)\mathbf{c} + \frac{\mu s}{s+1} \mathbf{b}$ と書ける。よって係数を比較して

$$\alpha = \frac{3\lambda}{s+3} = \frac{\mu s}{s+1}, \quad \beta = \frac{\lambda s}{s+3} = 1 - \mu$$

を得る。ここで λ を消去すると $\alpha = \frac{3\beta}{s}$ であり、 μ を消去すると $\beta = 1 - \frac{\alpha(s+1)}{s}$ である。したがって $\beta = 1 - \frac{3\beta(s+1)}{s^2}$, $\beta\{s^2 + 3s + 3\} = s^2$ より $\beta = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3}$, $\alpha = \frac{3s}{s^2 + 3s + 3}$ である。

(2) 辺 AC を底辺と見て、 B から直線 AC までの距離を h とする。点 F は $\overrightarrow{AF} = \alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{c}$ と表されるので、 AC に垂直な方向の成分は $\alpha \mathbf{b}$ の分だけである。したがって $FG = \alpha h$ であり、 h は三角形 ABC で固定されているから、 α を最大にすればよい。 $\alpha(s) = \frac{3s}{s^2 + 3s + 3}$ とおくと

$$\alpha'(s) = \frac{3(s^2 + 3s + 3) - 3s(2s + 3)}{(s^2 + 3s + 3)^2} = \frac{3(3 - s^2)}{(s^2 + 3s + 3)^2}$$

である。 $s > 0$ より、 $0 < s < \sqrt{3}$ で増加し、 $s > \sqrt{3}$ で減少する。よって FG が最大となるのは $s = \sqrt{3}$ のときである。

別解。 α を $\alpha = \frac{3}{s + 3 + \frac{3}{s}}$ と変形する。 $s > 0$ で $s + \frac{3}{s} \geq 2\sqrt{3}$ であり、等号は $s = \sqrt{3}$ のときに限る。分母が最小のとき α が最大になるので、同じく $s = \sqrt{3}$ を得る。

▶ 解法 2

【方針】

三角形の面積比を用いて交点 F の重心座標を直接求める。 F の B 成分が辺 AC からの距離比に一致するので、最後は相加相乗平均により分母を最小化する。

【解答】

(1) 三角形 ABC における点 F の重心座標を $(x:y:z)$ とすると、 $\overrightarrow{AF} = \frac{y}{x+y+z}\overrightarrow{AB} + \frac{z}{x+y+z}\overrightarrow{AC}$ である。

D は AB を $s:1$ に内分するので、直線 CD 上では $x:y = 1:s$ である。また E は BC を $s:3$ に内分するので、直線 AE 上では $y:z = 3:s$ である。したがって

$$(x:y:z) = (3:3s:s^2)$$

となる。よって

$$\alpha = \frac{3s}{s^2 + 3s + 3}, \quad \beta = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3}.$$

(2) B から直線 AC までの距離を h とする。重心座標の B 成分が α であるから、 F から AC までの距離は

$$FG = \alpha h = \frac{3h}{s + 3 + 3/s}$$

である。ここで $s > 0$ より

$$s + \frac{3}{s} \geq 2\sqrt{3}$$

であり、等号は $s = \sqrt{3}$ のときに限る。したがって分母が最小、すなわち FG が最大となるのは $s = \sqrt{3}$ である。

【総評】 難度 5、計算量 5。目安時間は 22 分。交点をパラメータで置くところまでは標準的だが、 E の内分比を逆に置くと以後の係数がすべて崩れる。採点上は、 F を AE 上と CD 上の両方で表す式、 α, β の消去、距離が α に比例する理由の 3 点が重要である。最大化は微分でも相加相乗平均でもよいが、 $s > 0$ と等号条件を明記しておく及答案が締まる。

【第 5 問】

α, β, γ を複素数とし、複素数 z について

$$z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \tag{*}$$

を考える。

(1) z は

$$(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$$

を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha| = |\beta| \neq 0$ とし、 γ は負の実数とする。このとき、(*) を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α, β を用いて表せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は与式の共役を取り、元の式との差を計算する。(2) では γ が実数なので (1) から $(\alpha - \bar{\beta})z$ が実数であることを読み取る。 $\delta = \alpha - \bar{\beta}$ と置き、 $\delta \neq 0$ なら $\delta z = \lambda$ と実数パラメータ化して元の式へ戻す。 $|\alpha| = |\beta|$ により 1 次項が消えることを計算で確認し、 $\delta = 0$ の場合は円になって無数解をもつことと比較する。

【解答】

(1) 与式 $z\bar{z} + \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$ の共役をとると $z\bar{z} + \bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta}z + \bar{\gamma} = 0$ である。元の式からこの式を引くと $(\alpha - \bar{\beta})z + (\beta - \bar{\alpha})\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$ となる。 $\beta - \bar{\alpha} = -(\bar{\alpha} - \beta)$ であるから $(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$ を得る。

(2) γ は負の実数であるから $\gamma - \bar{\gamma} = 0$ である。 $\delta = \alpha - \bar{\beta}$ とおくと、(1) の式は $\delta z - \bar{\delta}\bar{z} = 0$ である。これは δz が実数であることを表している。

まず $\delta \neq 0$ 、すなわち $\alpha \neq \bar{\beta}$ とする。このとき実数 λ を用いて $\delta z = \lambda$ と書けるので、 $z = \lambda/\delta$ である。これを元の式に代入すると

$$\frac{\lambda^2}{|\delta|^2} + \lambda \left(\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\bar{\delta}} \right) + \gamma = 0$$

となる。ここで

$$\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\bar{\delta}} = \frac{\alpha\bar{\delta} + \beta\delta}{|\delta|^2} = \frac{\alpha(\bar{\alpha} - \beta) + \beta(\alpha - \bar{\beta})}{|\delta|^2} = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{|\delta|^2} = 0$$

である。したがって $\frac{\lambda^2}{|\delta|^2} + \gamma = 0$ となる。 $\gamma < 0$ より $\lambda = \pm|\delta|\sqrt{-\gamma}$ の 2 つの実数解があり、対応する z も 2 個である。

次に $\delta = 0$, すなわち $\alpha = \bar{\beta}$ とする。このとき元の式は $|z|^2 + \alpha z + \bar{\alpha}z + \gamma = 0$ であり、平方完成すると $|z + \bar{\alpha}|^2 = |\alpha|^2 - \gamma$ である。 $|\alpha| \neq 0$ かつ $\gamma < 0$ より右辺は正であるから、これは円を表し、解は無数にある。

よって、解がちょうど 2 個あるための必要十分条件は $\alpha \neq \bar{\beta}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

複素係数を実部・虚部に分け、元の方程式を円と直線の共通部分として解釈する。 $|\alpha| = |\beta|$ により円の中心から直線へ下ろした垂線の足が原点になり、 $\gamma < 0$ から 2 交点をもつことが幾何的に分かる。

【解答】

(1) 与式の共役は

$$z\bar{z} + \bar{\beta}z + \bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\gamma} = 0$$

である。これを元の式から引けば

$$(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$$

を得る。

(2) $\alpha = A + Bi$, $\beta = C + Di$, $z = x + yi$ とする。 γ は実数なので、実部・虚部の条件は

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (A + C)x + (D - B)y + \gamma = 0, \\ (B + D)x + (A - C)y = 0. \end{cases}$$

第 1 式は中心

$$P\left(-\frac{A+C}{2}, -\frac{D-B}{2}\right)$$

の円であり、第 2 式は原点を通る直線である。

まず $\alpha \neq \bar{\beta}$ とする。このとき第 2 式は真の直線で、方向ベクトルとして

$$\mathbf{v} = (A - C, -B - D)$$

を取れる。中心の位置ベクトルとの内積は

$$\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{2}\{(A^2 + B^2) - (C^2 + D^2)\} = 0$$

である。ここで $|\alpha| = |\beta|$ を用いた。したがって円の中心からこの直線への垂線の足は原点である。一方、円の半径を R とすると

$$R^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 - \gamma > |\overrightarrow{OP}|^2$$

であるから、直線は円を異なる 2 点で横切る。よって解はちょうど 2 個である。

$\alpha = \bar{\beta}$ なら第 2 式は恒等的に 0 となり、第 1 式の円周上のすべての点が解になる。したがって必要十分条件は

$$\alpha \neq \bar{\beta}$$

である。

【総評】 難度 7, 計算量 6. 目安時間は 31 分。(1) の差を取るだけなら短い、(2) ではその式が「 $(\alpha - \bar{\beta})z$ は実数」という制約を表すことに気づけるかが核心である。 $|\alpha| = |\beta|$ で 1 次項が消える計算を省くと必要十分性が弱くなる。 $\alpha = \bar{\beta}$ の場合を忘れると、2 解ではなく円周上の無数解になる点を見落とすので注意したい。

【第 6 問】

a, b, c を実数とし、 $a \neq 0$ とする。

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} e^{ax} \cos bx \, dx,$$

$$J(a, b, c) = \int_0^{\pi/2} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$$

とおく。

- (1) $I(a, b)$ を求めよ。
 (2) $J(a, b, c)$ を $I(a, b+c)$ と $I(a, b-c)$ を用いて表せ。
 (3) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\pi/2} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx$$

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $e^{ax} \cos bx$ の原始関数を、微分して戻す形で求める。(2) は $\sin bx \sin cx$ を積和公式で $\cos(b-c)x$ と $\cos(b+c)x$ に分ける。(3) は 4 つの三角関数の積を積和公式で余弦の和に展開し、定数項だけが極限に残ることを (1) の評価式から示す。振動項は $I(1, kt)$ の形になり、分母が $1+k^2t^2$ で増えるため 0 に近づく。

【解答】

(1)

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} \right\} = e^{ax} \cos bx$$

である。したがって

$$I(a, b) = \left[\frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} \right]_0^{\pi/2}$$

であり、

$$I(a, b) = \frac{e^{a\pi/2} \left(a \cos \frac{b\pi}{2} + b \sin \frac{b\pi}{2} \right) - a}{a^2 + b^2}$$

である。

(2) 積和公式より $\sin bx \sin cx = \frac{1}{2} \{ \cos(b-c)x - \cos(b+c)x \}$ である。よって $J(a, b, c) = \frac{1}{2} \{ I(a, b-c) - I(a, b+c) \}$ である。

(3) $u = tx$ とおく。積和公式を順に用いると

$$\sin u \sin 2u \cos 3u \cos 4u = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cos 4u + \frac{1}{8} \cos 6u + \frac{1}{8} \cos 8u - \frac{1}{8} \cos 10u$$

である。したがって、求める積分を K_t とおくと

$$K_t = 8 \int_0^{\pi/2} e^x \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cos 4tx + \frac{1}{8} \cos 6tx + \frac{1}{8} \cos 8tx - \frac{1}{8} \cos 10tx \right) dx$$

である。

(1) の式から、正の定数 k に対して

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos ktx \, dx = I(1, kt)$$

であり、その絶対値は $t \rightarrow \infty$ で 0 に近づく。実際、分母は $1+k^2t^2$ で、分子は高々 t の程度で増えるだけである。したがって極限に残るのは定数項だけであり、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_t = 8 \cdot \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} e^x \, dx = e^{\pi/2} - 1$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

複素指数関数を使い, $I(a, b)$ を複素積分の実部として求める。(3) では三角関数積のフーリエ展開における定数項を取り出し, 非零周波数の積分が $O(1/t)$ で消えることを評価する。

【解答】

(1) $e^{ax} \cos bx$ は $e^{(a+ib)x}$ の実部であるから

$$I(a, b) = \Re \left[\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} \right]_0^{\pi/2}.$$

分母を実数化して実部を取ると

$$I(a, b) = \frac{e^{a\pi/2} \left(a \cos \frac{b\pi}{2} + b \sin \frac{b\pi}{2} \right) - a}{a^2 + b^2}.$$

(2) 積和公式から

$$\sin bx \sin cx = \frac{1}{2} \{ \cos(b-c)x - \cos(b+c)x \}$$

なので

$$J(a, b, c) = \frac{1}{2} \{ I(a, b-c) - I(a, b+c) \}.$$

(3) 複素指数関数を掛け合わせて同じ周波数をまとめると

$$8 \sin u \sin 2u \cos 3u \cos 4u = 1 - 2 \cos 4u + \cos 6u + \cos 8u - \cos 10u.$$

したがって求める式は

$$\int_0^{\pi/2} e^x \{ 1 - 2 \cos 4tx + \cos 6tx + \cos 8tx - \cos 10tx \} dx$$

である。正の定数 m について, (1) から

$$\left| \int_0^{\pi/2} e^x \cos(mtx) dx \right| \leq \frac{e^{\pi/2}(1+mt) + 1}{1+m^2t^2} \rightarrow 0.$$

よって極限に残るのは定数項だけであり, 答えは

$$\int_0^{\pi/2} e^x dx = e^{\pi/2} - 1$$

である。

【総評】 難度 7, 計算量 7。目安時間は 32 分。前半の積分公式は標準だが, (3) では三角関数の積を正しく展開できるかでほぼ決まる。定数項 $1/8$ を落とすと極限全体が消えてしまう。振動項が 0 に近づく理由は感覚で済ませず, (1) の $I(1, kt)$ を使って分母の増大を示すと説得力がある。