

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2018 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面において、 x, y がともに整数であるとき、点 (x, y) を格子点とよぶ。 m を正の整数とすると、放物線

$$y = x^2 - 2mx + m^2 = (x - m)^2$$

と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D とする。

(1) D の周上の格子点の数 L_m を m で表せ。

(2) D の周上および内部の格子点の数 T_m を m で表せ。

(3) D の面積を S_m とする。極限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{S_m}$$

を求めよ。

第 2 問

点 O を中心とする半径 1 の円を S とする。

(1) S の周上に 3 点 P, Q, R がこの順に反時計回りに並んでいる。 $\alpha = \angle POQ$ 、 $\beta = \angle QOR$ とし、

$$0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi$$

とする。三角形 PQR の面積が

$$\frac{1}{2} \{ \sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) \}$$

で与えられることを示せ。

(2) S の周上に 5 点 A, B, C, D, X がこの順に反時計回りに並んでいる。ただし、

$$\angle AOB = \frac{\pi}{2}, \quad \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \quad \angle COD = \frac{\pi}{3}$$

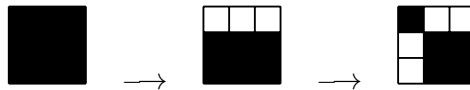
であり、点 X は D と A の間を動くものとする。三角形 XAB と三角形 XCD の面積の和の最大値を求めよ。また、そのときの $\angle AOX$ を求めよ。

第 3 問

片面が黒、もう片面が白の正方形の板が 9 枚ある。これらを横 3 列、縦 3 列に、すべて黒が表になるように並べる。さいころの出た目に従い、次のように 1 列の板をすべてひっくり返す。

- 1 が出れば上の横列をすべてひっくり返す。
- 2 が出れば中央の横列をすべてひっくり返す。
- 3 が出れば下の横列をすべてひっくり返す。
- 4 が出れば左の縦列をすべてひっくり返す。
- 5 が出れば中央の縦列をすべてひっくり返す。
- 6 が出れば右の縦列をすべてひっくり返す。

例えば、さいころを 2 回振って最初に 1、次に 4 が出たとき、盤面は



となる。

- (1) さいころを 2 回振ったとき、すべての板が黒になっている確率を求めよ。
- (2) さいころを 3 回振ったとき、すべての板が白になっている確率を求めよ。
- (3) さいころを 4 回振ったとき、盤面が次のようになっている確率を求めよ。



第 4 問

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 1), \\ \frac{1}{2}\sqrt{|a_{n-1} + 1|} - 1 & (n \text{ が偶数}), \\ a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} & (n \text{ が奇数かつ } n \geq 3) \end{cases}$$

を満たすとする。

(1) n が奇数のとき、 a_n を求めよ。

(2) n が偶数のとき、 a_n を求めよ。

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

を求めよ。

第 5 問

辺の長さが 1 である正四面体 $ABCD$ と点 O を考える。

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

で定まる点を G とする。

(1)

$$|\overrightarrow{GA}| \quad \text{および} \quad \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$$

を求めよ。

(2) 点 P は正四面体 $ABCD$ の表面および内部を動くとする。このとき

$$L = |\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 + |\overrightarrow{CP}|^2 + |\overrightarrow{DP}|^2$$

の最大値および最小値を求めよ。

第 6 問

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を

$$a_n = 2^n \int_1^{\sqrt{e}} x(\log x)^n dx$$

で定める。ただし、 e は自然対数の底であり、無理数であることが知られている。

(1) 不等式

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{e}{2(n+1)}$$

を示せ。

(2) 各 n に対して

$$a_n = p_n e + q_n$$

となるように有理数 p_n, q_n をとる。 $n \geq 2$ のとき、 p_n を p_{n-1} で、 q_n を q_{n-1} でそれぞれ表せ。

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n p_n}{n!}$$

を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)