

東北大学 2018 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面において、 x, y がともに整数であるとき、点 (x, y) を格子点とよぶ。 m を正の整数とすると、放物線

$$y = x^2 - 2mx + m^2 = (x - m)^2$$

と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D とする。

(1) D の周上の格子点の数 L_m を m で表せ。

(2) D の周上および内部の格子点の数 T_m を m で表せ。

(3) D の面積を S_m とする。極限

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{S_m}$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

領域は文系後期第 1 問と同じく $0 \leq x \leq m$ 、 $0 \leq y \leq (m - x)^2$ と見て、周上と内部込みの格子点を縦に数える。(3) では面積 S_m を

$$\int_0^m (m - x)^2 dx$$

で求める。 T_m も 3 次式として展開しておく、 T_m/S_m の極限は最高次係数の比較で決まる。

【解答】

(1) 放物線は $y = (x - m)^2$ である。 x 軸、 y 軸とともに囲まれる領域は $0 \leq x \leq m$ 、 $0 \leq y \leq (m - x)^2$ である。

周上の格子点を、 x 軸、 y 軸、放物線に分けて数える。 x 軸上は $m + 1$ 個、 y 軸上は $m^2 + 1$ 個、放物線上は整数 $x = 0, 1, \dots, m$ に対して 1 個ずつあり $m + 1$ 個である。3 つの頂点 $(0, 0)$ 、 $(0, m^2)$ 、 $(m, 0)$ を重複して数えているので 3 を引く。したがって $L_m = m^2 + 2m$ である。

(2) 整数 $x = 0, 1, \dots, m$ を固定すると、 y は $0, 1, 2, \dots, (m - x)^2$ を取り、格子点は $(m - x)^2 + 1$ 個ある。よって $T_m = \sum_{x=0}^m \{(m - x)^2 + 1\} = \sum_{j=0}^m (j^2 + 1)$ である。したがって $T_m = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + m + 1$ である。

(3) 面積は

$$S_m = \int_0^m (m - x)^2 dx$$

である。 $u = m - x$ と見れば

$$S_m = \int_0^m u^2 du = \frac{m^3}{3}$$

である。

一方、(2) の式を展開すると $T_m = \frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{7m}{6} + 1$ である。よって

$$\frac{T_m}{S_m} = \frac{\frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{7m}{6} + 1}{\frac{m^3}{3}}$$

であり、 $m \rightarrow \infty$ で最高次項の比だけが残る。したがって $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{S_m} = 1$ である。

▶ 解法 2

【方針】

縦列ごとに格子点を数える。(3) では T_m/m^3 をリーマン和として解釈し、面積 S_m の主要項と比較する。

【解答】

(1) 3 つの境界上の格子点を包除原理で数えると

$$L_m = (m+1) + (m^2+1) + (m+1) - 3 = m^2 + 2m.$$

(2) $j = 0, 1, \dots, m$ に対し、縦線 $x = m - j$ 上の格子点は $j^2 + 1$ 個である。したがって

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{j=0}^m (j^2 + 1) \\ &= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + m + 1. \end{aligned}$$

(3) 面積は

$$S_m = \int_0^m (m-x)^2 dx = \frac{m^3}{3}.$$

一方、

$$\frac{T_m}{m^3} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^m \left(\frac{j}{m}\right)^2 + \frac{m+1}{m^3}.$$

右辺第 1 項は t^2 のリーマン和、第 2 項は 0 に収束するので

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{m^3} = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

また $S_m/m^3 = 1/3$ だから

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{T_m}{S_m} = 1.$$

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。格子点を縦方向に数える発想ができれば標準的に処理できる。(1) では境界を 3 つに分けて数えるため、頂点の重複を必ず引く。(2) は x ごとに $(m-x)^2 + 1$ 個という数え方が最も簡単である。(3) は面積も点数も主要項が $m^3/3$ になるため、低次項が極限で消えることを明示すればよい。

【第 2 問】

点 O を中心とする半径 1 の円を S とする。

(1) S の周上に 3 点 P, Q, R がこの順に反時計回りに並んでいる。 $\alpha = \angle POQ$ 、 $\beta = \angle QOR$ とし、

$$0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi$$

とする。三角形 PQR の面積が

$$\frac{1}{2} \{ \sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) \}$$

で与えられることを示せ。

(2) S の周上に 5 点 A, B, C, D, X がこの順に反時計回りに並んでいる。ただし、

$$\angle AOB = \frac{\pi}{2}, \quad \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \quad \angle COD = \frac{\pi}{3}$$

であり、点 X は D と A の間を動くものとする。三角形 XAB と三角形 XCD の面積の和の最大値を求めよ。また、そのときの $\angle AOX$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は半径 1 の円の中心 O と各頂点を結び、 $\triangle OPQ$ 、 $\triangle OQR$ から $\triangle OPR$ を引く面積分解で示す。(2) は A から反時計回りに測った X の偏角を θ と置く。点の順序から $7\pi/6 \leq \theta \leq 2\pi$ である。(1) を $\triangle XAB$ と $\triangle XCD$ に適用し、面積和を $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \sin \theta$ に整理して最大化する。

【解答】

(1) 半径 1 の円なので $OP = OQ = OR = 1$ である。点 P, Q, R がこの順に反時計回りに並ぶので、中心 O と結ぶと、三角形 PQR の面積は $\triangle OPQ + \triangle OQR - \triangle OPR$ で求められる。

それぞれの面積は、2 辺とその間の角から

$$[OPQ] = \frac{1}{2} \sin \alpha, \quad [OQR] = \frac{1}{2} \sin \beta, \quad [OPR] = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta)$$

である。したがって $[PQR] = \frac{1}{2} \{\sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)\}$ である。

(2) A から反時計回りに測った X の偏角を θ とする。点の順序より $\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq 2\pi$ である。

まず $\triangle XAB$ の面積を求める。円周上の順序を A, B, X と見て (1) を用いると、

$$[XAB] = \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{\pi}{2} + \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \theta \right\}$$

である。すなわち $[XAB] = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta - \sin \theta)$ である。

次に $\triangle XCD$ について、円周上の順序を C, D, X と見る。 $\angle COD = \frac{\pi}{3}$ であり、 D の偏角は $\frac{7\pi}{6}$ 、 C の偏角は $\frac{5\pi}{6}$ であるから

$$[XCD] = \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{\pi}{3} + \sin \left(\theta - \frac{7\pi}{6} \right) - \sin \left(\theta - \frac{5\pi}{6} \right) \right\}$$

である。ここで

$$\sin \left(\theta - \frac{7\pi}{6} \right) - \sin \left(\theta - \frac{5\pi}{6} \right) = \cos \theta$$

なので $[XCD] = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cos \theta$ である。

したがって面積の和は $[XAB] + [XCD] = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \sin \theta$ である。 $\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq 2\pi$ において、 $-\sin \theta$ が最大になるのは $\theta = \frac{3\pi}{2}$ のときである。よって最大値は $1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$ である。このとき、通常の小さい方の角 $\angle AOX$ は $\frac{\pi}{2}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

円周上の点を偏角で座標表示し、三角形の面積を 2 次行列式で計算する。(2) は面積和を $\sin \theta$ の一次式まで整理して最大化する。

【解答】

(1) 回転して $P = (1, 0)$ としてよい。このとき

$$Q = (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad R = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)).$$

行列式で面積を計算すると

$$\begin{aligned} 2[PQR] &= \det(Q - P, R - P) \\ &= \sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

点の順序と角の範囲から右辺は正であるから、絶対値を付ける必要はない。これで所要の式を得る。

(2) A の偏角を 0、 X の偏角を θ とすれば

$$\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq 2\pi.$$

(1) の行列式公式を A, B, X と C, D, X に適用すると

$$[XAB] = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta - \sin \theta),$$

$$[XCD] = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cos \theta.$$

したがって

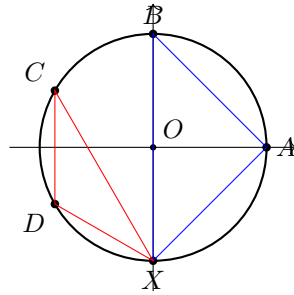
$$[XAB] + [XCD] = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \sin \theta.$$

指定区間では $-\sin \theta \leq 1$ で、等号は $\theta = 3\pi/2$ のときである。よって最大値は

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

このとき OA と OX の小さい方のなす角は

$$\angle AOX = \frac{\pi}{2}.$$



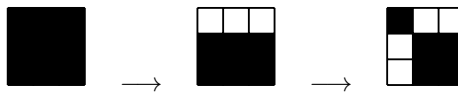
【総評】 難度 6、目安時間 24 分。中心から頂点へ線を引いて面積を分解する発想が (1) の要点であり、(2) でもそのまま使う。 X の偏角 θ は反時計回りには $[7\pi/6, 2\pi]$ にあるが、最後に答える $\angle AOX$ は小さい方の角である点に注意する。面積和が $\sin \theta$ だけに整理されるので、最大化自体は単純である。

【第 3 問】

片面が黒、もう片面が白の正方形の板が 9 枚ある。これらを横 3 列、縦 3 列に、すべて黒が表になるように並べる。さいころの出た目に従い、次のように 1 列の板をすべてひっくり返す。

- 1 が出れば上の横列をすべてひっくり返す。
- 2 が出れば中央の横列をすべてひっくり返す。
- 3 が出れば下の横列をすべてひっくり返す。
- 4 が出れば左の縦列をすべてひっくり返す。
- 5 が出れば中央の縦列をすべてひっくり返す。
- 6 が出れば右の縦列をすべてひっくり返す。

例えば、さいころを 2 回振って最初に 1、次に 4 が出たとき、盤面は



となる。

- (1) さいころを 2 回振ったとき、すべての板が黒になっている確率を求めよ。
- (2) さいころを 3 回振ったとき、すべての板が白になっている確率を求めよ。
- (3) さいころを 4 回振ったとき、盤面が次のようになっている確率を求めよ。



▶ 解法 1

【方針】

盤面は横 3 列・縦 3 列の選択回数の偶奇だけで決まる。(1)(2) は後期文系第 3 問と同じく、同じ列を 2 回、または横 3 列・縦 3 列を 1 回ずつ選ぶ場合を数える。(3) では 4 回後の目標盤面に対応する偶奇パターンが 2 種類ある。中央横列と中央縦列だけが奇数の場合は、奇数列 2 本の回数配分が (1, 1) に加えて偶数 2 回、または (3, 1), (1, 3) となる。もう一方の 4 本奇数の場合は 4 本を 1 回ずつ選ぶ。

【解答】

(1) 2 回後にすべて黒であるには、すべての板が偶数回反転されなければならない。2 回の操作でこれが起こるのは、同じ横列または同じ縦列を 2 回選ぶ場合だけである。選ぶ列は 6 通りなので $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$ である。

(2) 3 回後にすべて白であるには、9 枚すべてが奇数回反転される必要がある。3 回でこれを実現するには、横 3 列を 1 回ずつ選ぶか、縦 3 列を 1 回ずつ選ぶしかない。順序を考えると有利な出方は $3! + 3! = 12$ 通りである。したがって確率は $\frac{12}{6^3} = \frac{1}{18}$ である。

(3) 図の盤面になる偶奇パターンは 2 種類ある。1 つ目は、中央の横列と中央の縦列だけを奇数回選び、残り 4 列を偶数回選ぶ場合である。4 回の操作でこの偶奇にする出方を数える。

中央横列と中央縦列をそれぞれ 1 回ずつ選び、残り 2 回で同じ非目標列を 2 回選ぶ場合は、非目標列の選び方が 4 通り、順序が $\frac{4!}{2!} = 12$ 通りなので、合計 48 通りである。また、中央横列と中央縦列のどちらか一方を 3 回、もう一方を 1 回選ぶ場合は $2 \cdot \frac{4!}{3!} = 8$ 通りである。したがって 1 つ目のパターンは $48 + 8 = 56$ 通りである。

2 つ目は、上下の横列と左右の縦列の 4 本を奇数回選び、中央横列と中央縦列を偶数回選ぶ場合である。4 回の操作では、この 4 本をそれぞれ 1 回ずつ選ぶしかないなので $4! = 24$ 通りである。

よって有利な出方は $56 + 24 = 80$ 通りである。全事象は 6^4 通りだから $\frac{80}{6^4} = \frac{5}{81}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

行・列を選んだ回数の偶奇を 0、1 で表し、各板の反転回数を行と列の偶奇の和として記述する。目標盤面に対応する 2 種類の偶奇パターンを求め、多項係数で 4 回の順序を数える。

【解答】

横列の偶奇を r_1, r_2, r_3 、縦列の偶奇を c_1, c_2, c_3 とすると、板 (i, j) が白である条件は

$$r_i + c_j \equiv 1 \pmod{2}$$

である。

(1) 全て黒に戻るには同じ列を 2 回選ぶしかないから

$$\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}.$$

(2) 全て白にするには、横 3 列または縦 3 列を各 1 回選ぶ。よって

$$\frac{2 \cdot 3!}{6^3} = \frac{1}{18}.$$

(3) 目標の白黒行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これを実現する奇数回選択の列集合は

$$\{2, 5\} \quad \text{または} \quad \{1, 3, 4, 6\}$$

である。

集合 $\{2, 5\}$ の場合、2 と 5 を各 1 回、残る同じ目を 2 回出す出方は

$$4 \cdot \frac{4!}{2!} = 48$$

通りである。また 2、5 の一方を 3 回、他方を 1 回出す出方は

$$2 \cdot \frac{4!}{3!} = 8$$

通りである。したがって 56 通りである。

集合 $\{1, 3, 4, 6\}$ の場合は 4 つを各 1 回出すので $4! = 24$ 通りである。よって

$$\frac{56 + 24}{6^4} = \frac{5}{81}.$$

【総評】 難度 6、目安時間 24 分。盤面を直接追うより、6 本の列の選択回数の偶奇で状態を表すのが基本である。(3) では 4 回操作なので、奇数にしたい列が 2 本の場合には $(1, 1)$ だけでなく $(3, 1), (1, 3)$ の配分もある。ここを落とすと数が不足する。4 本奇数のパターンは各 1 回ずつに限られるため、 $4!$ で数えられる。

【第 4 問】

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 1), \\ \frac{1}{2} \sqrt{|a_{n-1} + 1|} - 1 & (n \text{ が偶数}), \\ a_{n-1}^2 + 2a_{n-1} & (n \text{ が奇数かつ } n \geq 3) \end{cases}$$

を満たすとする。

(1) n が奇数のとき、 a_n を求めよ。

(2) n が偶数のとき、 a_n を求めよ。

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

奇数番目だけを $b_m = a_{2m-1}$ とおくと、偶数番目を經由して $b_{m+1} + 1 = (b_m + 1)/4$ という等比型の漸化式が得られる。初期値 $b_1 = 0$ から奇数番目の一般項を求める。偶数番目は直前の奇数番目を平方根の式へ代入すれば直接求まる。どちらも -1 に近づくので極限も決まる。

【解答】

(1) 奇数番目だけを取り出して $b_m = a_{2m-1}$ とおく。 $b_1 = a_1 = 0$ である。 $a_{2m-1} = b_m$ とする。偶数番目では $a_{2m} = \frac{1}{2} \sqrt{|b_m + 1|} - 1$ である。後で得られるように $b_m + 1 > 0$ なので、絶対値は外してよい。次の奇数番目では $a_{2m+1} = a_{2m}^2 + 2a_{2m} = (a_{2m} + 1)^2 - 1$ である。ところが $a_{2m} + 1 = \frac{1}{2} \sqrt{|b_m + 1|}$ だから $b_{m+1} + 1 = a_{2m+1} + 1 = \frac{1}{4} (b_m + 1)$ である。 $b_1 + 1 = 1$ より $b_m + 1 = 4^{-(m-1)}$ である。したがって $b_m = -1 + 4^{-(m-1)}$ である。 $n = 2m - 1$ と戻すと、 n が奇数のとき $a_n = -1 + 4^{-\frac{n-1}{2}}$ である。

(2) $n = 2m$ とする。(1) より $a_{2m-1} + 1 = 4^{-(m-1)}$ である。したがって

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{1}{2} \sqrt{a_{2m-1} + 1} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4^{-(m-1)}} - 1 \\ &= 2^{-m} - 1 \end{aligned}$$

である。よって n が偶数のとき $a_n = -1 + 2^{-\frac{n}{2}}$ である。

(3) (1)、(2) より、奇数番目では $a_n = -1 + 4^{-\frac{n-1}{2}}$ であり、偶数番目では $a_n = -1 + 2^{-\frac{n}{2}}$ である。どちらの補正項も $n \rightarrow \infty$ で 0 に近づく。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$ である。

▶ 解法 2

【方針】

$b_n = a_n + 1$ と平行移動して式を単純化し、奇数番目から次の奇数番目への 2 段階漸化式を作る。

【解答】

$b_n = a_n + 1$ とおく。すると

$$b_1 = 1,$$

偶数 n では

$$b_n = \frac{1}{2}\sqrt{|b_{n-1}|},$$

奇数 $n \geq 3$ では

$$b_n = b_{n-1}^2$$

である。 $b_1 > 0$ から帰納的に $b_n > 0$ なので、絶対値は外せる。

(1) $c_m = b_{2m-1}$ とおくと

$$b_{2m} = \frac{1}{2}\sqrt{c_m}, \quad c_{m+1} = b_{2m}^2 = \frac{1}{4}c_m.$$

$c_1 = 1$ だから

$$c_m = 4^{-(m-1)}.$$

したがって奇数 $n = 2m - 1$ では

$$a_n = b_n - 1 = -1 + 4^{-(n-1)/2}.$$

(2) 偶数 $n = 2m$ では

$$b_{2m} = \frac{1}{2}\sqrt{4^{-(m-1)}} = 2^{-m},$$

よって

$$a_n = -1 + 2^{-n/2}.$$

(3) 奇数番目・偶数番目のいずれでも $b_n \rightarrow 0$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1.$$

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。偶数番目と奇数番目で定義が異なるため、奇数番目だけを抜き出すと構造が見える。 $a_{2m+1} + 1 = (a_{2m} + 1)^2$ と、 $a_{2m} + 1 = \frac{1}{2}\sqrt{a_{2m-1} + 1}$ を組み合わせるのが核心である。絶対値は、得られた一般項から $a_{2m-1} + 1 > 0$ と分かるので問題なく外せる。

【第 5 問】

辺の長さが 1 である正四面体 $ABCD$ と点 O を考える。

$$\vec{OG} = \frac{1}{4} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

で定まる点を G とする。

(1)

$$|\vec{GA}| \quad \text{および} \quad \vec{GA} \cdot \vec{GB}$$

を求めよ。

(2) 点 P は正四面体 $ABCD$ の表面および内部を動くとする。このとき

$$L = |\vec{AP}|^2 + |\vec{BP}|^2 + |\vec{CP}|^2 + |\vec{DP}|^2$$

の最大値および最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

点 G は正四面体の 4 頂点の重心であり、 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ が成り立つ。対称性から 4 本の長さは等しく、異なる 2 本の内積も等しいとして、和が 0 である条件と辺の長さ 1 である条件から求める。(2) では $\vec{GP} = \vec{v}$ とおき、 L を $|\vec{v}|^2$ だけの式にする。正四面体内で $|\vec{GP}|$ は重心で最小、頂点で最大になる。

【解答】

(1) 定義より G は 4 頂点の重心である。したがって

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$$

である。正四面体の対称性より $|\vec{GA}|^2 = \rho^2$ とおき、異なる 2 頂点へのベクトルの内積を $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \lambda$ とおくことができる。

上の和と $\vec{GA}$ の内積を取ると $\rho^2 + 3\lambda = 0$ である。また辺 AB の長さは 1 なので

$$1 = |\vec{AB}|^2 = |\vec{GB} - \vec{GA}|^2 = 2\rho^2 - 2\lambda$$

である。この 2 式を解くと $\rho^2 = \frac{3}{8}$, $\lambda = -\frac{1}{8}$ である。したがって $|\vec{GA}| = \frac{\sqrt{6}}{4}$ であり、 $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = -\frac{1}{8}$ である。

(2) $\vec{v} = \vec{GP}$ とおく。このとき $\vec{AP} = \vec{v} - \vec{GA}$ であり、他の頂点についても同様である。よって

$$\begin{aligned} L &= \sum_{X=A,B,C,D} |\vec{v} - \vec{GX}|^2 \\ &= 4|\vec{v}|^2 + \sum_{X=A,B,C,D} |\vec{GX}|^2 - 2\vec{v} \cdot \sum_{X=A,B,C,D} \vec{GX} \end{aligned}$$

である。最後の和は $\vec{0}$ なので消える。また (1) より各 $|\vec{GX}|^2$ は $\frac{3}{8}$ である。したがって $L = 4|\vec{v}|^2 + 4 \cdot \frac{3}{8} = 4|\vec{GP}|^2 + \frac{3}{2}$ である。

点 P が正四面体の表面および内部を動くとき、 $|\vec{GP}|$ の最小値は $P = G$ のときの 0 である。また、任意の内部点は頂点の凸結合で表されるので、 $|\vec{GP}|$ は頂点までの距離 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ を超えない。最大は頂点で達成される。

したがって $L_{\min} = \frac{3}{2}$ であり、 $L_{\max} = 4 \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{2} = 3$ である。よって $L_{\min} = \frac{3}{2}$, $L_{\max} = 3$ である。

▶ 解法 2

【方針】

重心 G を原点とする対称な座標を 4 頂点に与える。(2) では P を頂点の凸結合で表し、距離平方和を $|\overrightarrow{GP}|^2$ に帰着する。

【解答】

G を原点とし、4 頂点を

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, 1), & B &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, -1, -1), \\ C &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1, 1, -1), & D &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1, -1, 1) \end{aligned}$$

とおく。どの 2 頂点間の距離も 1 であり、4 ベクトルの和は 0 なので、この配置の原点が G である。

(1) 座標から

$$|\overrightarrow{GA}|^2 = \frac{3}{8}, \quad \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{1-1-1}{8} = -\frac{1}{8}.$$

よって

$$|\overrightarrow{GA}| = \frac{\sqrt{6}}{4}, \quad \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = -\frac{1}{8}.$$

(2) $\mathbf{p} = \overrightarrow{GP}$ 、4 頂点の位置ベクトルを $\mathbf{v}_A, \dots, \mathbf{v}_D$ と書くと

$$\begin{aligned} L &= \sum_{X=A,B,C,D} |\mathbf{p} - \mathbf{v}_X|^2 \\ &= 4|\mathbf{p}|^2 + \sum_X |\mathbf{v}_X|^2 \\ &= 4|\mathbf{p}|^2 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$P = G$ のとき $|\mathbf{p}| = 0$ だから

$$L_{\min} = \frac{3}{2}.$$

また P は頂点の凸結合

$$\mathbf{p} = \lambda_A \mathbf{v}_A + \lambda_B \mathbf{v}_B + \lambda_C \mathbf{v}_C + \lambda_D \mathbf{v}_D, \quad \lambda_X \geq 0, \quad \sum_X \lambda_X = 1$$

と表せる。したがって

$$|\mathbf{p}| \leq \sum_X \lambda_X |\mathbf{v}_X| = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

等号は P が頂点のときに成り立つので

$$L_{\max} = 4 \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{2} = 3.$$

【総評】 難度 5、目安時間 20 分。正四面体の対称性を使い、重心から各頂点へのベクトルの長さと相互の内積を 2 つの未知数で置くと計算が短い。(2) では P への距離の二乗和が、重心から P までの距離だけで決まる形に変形される。最大値は頂点で、最小値は重心で達成されることを、凸結合または対称性で説明すると十分である。

【第 6 問】

数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を

$$a_n = 2^n \int_1^{\sqrt{e}} x(\log x)^n dx$$

で定める。ただし、 e は自然対数の底であり、無理数であることが知られている。

(1) 不等式

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{e}{2(n+1)}$$

を示せ。

(2) 各 n に対して

$$a_n = p_n e + q_n$$

となるように有理数 p_n, q_n をとる。 $n \geq 2$ のとき、 p_n を p_{n-1} で、 q_n を q_{n-1} でそれぞれ表せ。

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n p_n}{n!}$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

置換 $t = 2 \log x$ により、積分を

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t t^n dt$$

に直す。(1) は $0 \leq t \leq 1$ で $1 \leq e^t \leq e$ を使う。(2) は部分積分で $a_n = e/2 - n a_{n-1}$ を得て、 p_n, q_n の漸化式に移す。(3) は q_n を明示し、 $(-1)^n a_n/n! \rightarrow 0$ と (1) の評価から $(-1)^n p_n/n!$ の極限を取り出す。

【解答】

(1) $t = 2 \log x$ とおく。このとき $x = e^{t/2}$, $dx = \frac{1}{2} e^{t/2} dt$ であり、 $x = 1$ のとき $t = 0$ 、 $x = \sqrt{e}$ のとき $t = 1$ である。したがって

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n \int_1^{\sqrt{e}} x(\log x)^n dx \\ &= 2^n \int_0^1 e^{t/2} \left(\frac{t}{2}\right)^n \frac{1}{2} e^{t/2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^t t^n dt \end{aligned}$$

である。 $0 \leq t \leq 1$ では $1 \leq e^t \leq e$ であるから

$$\frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt \leq a_n \leq \frac{e}{2} \int_0^1 t^n dt$$

である。よって $\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{e}{2(n+1)}$ である。

(2)

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t t^n dt$$

を部分積分する。 t^n を微分する側にとると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left([e^t t^n]_0^1 - n \int_0^1 e^t t^{n-1} dt \right) \\ &= \frac{e}{2} - n a_{n-1} \end{aligned}$$

である。 $a_{n-1} = p_{n-1} e + q_{n-1}$ と書くと $a_n = (\frac{1}{2} - n p_{n-1}) e - n q_{n-1}$ である。 e は無理数なので、この表し方の係数は一意である。したがって $p_n = \frac{1}{2} - n p_{n-1}$, $q_n = -n q_{n-1}$ である。

(3) まず

$$a_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t t dt = \frac{1}{2}$$

であるから $p_1 = 0$, $q_1 = \frac{1}{2}$ である。(2) より $q_n = -nq_{n-1}$ なので $q_n = \frac{(-1)^{n-1}n!}{2}$ である。

したがって $a_n = p_n e + \frac{(-1)^{n-1}n!}{2}$ であり、両辺に $\frac{(-1)^n}{n!}$ を掛けると $\frac{(-1)^n a_n}{n!} = \frac{(-1)^n p_n}{n!} e - \frac{1}{2}$ である。

(1) より $0 < a_n \leq \frac{e}{2(n+1)}$ なので $\frac{a_n}{n!} \rightarrow 0$ である。よって上の式で極限を取ると $0 = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n p_n}{n!} - \frac{1}{2}$ となる。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n p_n}{n!} = \frac{1}{2e}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

変数変換後の積分を部分積分して係数漸化式を得る。 q_n を明示し、正規化した p_n と小さな積分剰余 $a_n/n!$ の関係から極限を決める。

【解答】

(1) $t = 2 \log x$ とおくと

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{t t^n} dt.$$

区間 $0 \leq t \leq 1$ では $1 \leq e^t \leq e$ だから

$$\frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt \leq a_n \leq \frac{e}{2} \int_0^1 t^n dt,$$

すなわち

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{e}{2(n+1)}.$$

(2) 部分積分により

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} [e^{t t^n}]_0^1 - \frac{n}{2} \int_0^1 e^{t t^{n-1}} dt \\ &= \frac{e}{2} - n a_{n-1}. \end{aligned}$$

e の無理性から有理係数表示は一意なので

$$p_n = \frac{1}{2} - n p_{n-1}, \quad q_n = -n q_{n-1}.$$

(3) $a_1 = 1/2$ より $p_1 = 0, q_1 = 1/2$ である。したがって

$$q_n = \frac{(-1)^{n-1}n!}{2}.$$

これを $a_n = p_n e + q_n$ に代入し、 $(-1)^n/n!$ を掛けると

$$\frac{(-1)^n p_n}{n!} = \frac{1}{2e} + \frac{(-1)^n a_n}{e n!}.$$

(1) より

$$0 < \frac{a_n}{n!} \leq \frac{e}{2(n+1)n!} \rightarrow 0.$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n p_n}{n!} = \frac{1}{2e}.$$

【総評】 難度 7、目安時間 28 分。置換 $t = 2 \log x$ により積分区間が $[0, 1]$ になり、評価も部分積分も一気に扱いやすくなる。(2) の漸化式では、 e が無理数であることによって p_n, q_n の係数比較が正当化される。(3) では q_n を先に明示し、 $(-1)^n a_n/n!$ が 0 に近づくことを (1) の評価から示すのが流れである。