

入 学 試 験 問 題



数 学

東 北 大 学 2018 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面における 2 つの放物線

$$C: y = (x - a)^2 + b, \quad D: y = -x^2$$

を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり、その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき、 C の頂点 (a, b) の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a, b が (1) の条件を満たしながら動くとき、 C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め、図示せよ。

第 2 問

n を 2 以上、 a を 1 以上の整数とする。箱の中に、1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ、合計 n 枚入っている。この箱から、1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す、という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行で、それまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

- (1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。
- (2) $p(2)$ を求めよ。
- (3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。

第 3 問

整数 a, b は等式

$$3^a - 2^b = 1 \quad (*)$$

を満たしているとする。

- (1) a, b はともに正となることを示せ。
- (2) $b > 1$ ならば、 a は偶数であることを示せ。
- (3) $(*)$ を満たす整数の組 (a, b) をすべてあげよ。

第 4 問

三角形 ABC の内接円の半径を r 、外接円の半径を R とし、

$$h = \frac{r}{R}$$

とする。また、 $\angle A = 2\alpha$ 、 $\angle B = 2\beta$ 、 $\angle C = 2\gamma$ とおく。

(1) $h = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ となることを示せ。

(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leq \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。

(3) 一般の三角形 ABC に対して

$$h \leq \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。

第 5 問

α を複素数とする。複素数 z の方程式

$$z^2 - \alpha z + 2i = 0 \quad (*)$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

(1) 方程式 (*) が実数解をもつように α が動くとき、点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

(2) 方程式 (*) が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\pi/4$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき、点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

第 6 問

xy 平面内の図形

$$S : \begin{cases} x + y^2 \leq 2, \\ x + y \geq 0, \\ x - y \leq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y = -x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

(1) S を xy 平面に図示せよ。

(2) V を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)