

東北大学 2019 年度 文系（後期）

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の等式を満たす実数 a をすべて求めよ。

$$\int_0^1 |x^2 - ax| dx = \frac{1}{3}$$

▶ 解法 1（絶対値の符号で 3 つに分ける）

【方針】

$x^2 - ax = x(x - a)$ の符号が変わる位置によって、 $a \leq 0$ 、 $0 \leq a \leq 1$ 、 $a \geq 1$ の 3 つに分ける。それぞれ絶対値を外して積分し、得られた方程式をその場合の範囲条件と照合する。境界 $a = 0, 1$ は重複してよいが、最後に解として残るかを確認する。

【解答】

$x^2 - ax = x(x - a)$ であり、符号は a の位置によって変わる。

$a \leq 0$ の場合

$$\int_0^1 |x^2 - ax| dx = \int_0^1 (x^2 - ax) dx = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}.$$

これが $1/3$ に等しいので $a = 0$ である。

$0 \leq a \leq 1$ の場合

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x^2 - ax| dx &= \int_0^a (ax - x^2) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{3}. \end{aligned}$$

これが $1/3$ に等しい条件は

$$a(2a^2 - 3) = 0.$$

範囲内で残るのは $a = 0$ だけである。

$a \geq 1$ の場合

$$\int_0^1 |x^2 - ax| dx = \int_0^1 (ax - x^2) dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}.$$

これが $1/3$ に等しいので $a = 4/3$ である。したがって

$$a = 0, \quad \frac{4}{3}.$$

▶ 解法 2 (基準値との大小で候補を絞る)

【方針】

積分を

$$I(a) = \int_0^1 x|x-a| dx$$

と見る。 $a < 0$ と $0 < a \leq 1$ では $I(0) = 1/3$ との大小を先に判定し、残る $a \geq 1$ だけを計算する。

【解答】

求める積分を

$$I(a) = \int_0^1 x|x-a| dx$$

とおく。

まず $a < 0$ なら、 $0 < x \leq 1$ で $|x-a| = x-a > x$ だから

$$I(a) > \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

$a = 0$ では等号が成り立つ。

次に $0 < a \leq 1$ では

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^a x(a-x) dx + \int_a^1 x(x-a) dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{a}{2} + \frac{a^3}{3}. \end{aligned}$$

ここで $0 < a \leq 1$ なら $a^3/3 \leq a/3 < a/2$ なので

$$I(a) < \frac{1}{3}.$$

したがってこの範囲に解はない。

最後に $a \geq 1$ なら

$$I(a) = \int_0^1 x(a-x) dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}.$$

これが $1/3$ に等しい条件は

$$a = \frac{4}{3}.$$

ゆえに

$$a = 0, \quad \frac{4}{3}$$

である。

【総評】 難度 3、目安時間 10 分。絶対値付き積分の基本問題で、符号が変わる位置 $x = a$ が区間 $[0, 1]$ のどこにあるかで場合分けする。 $0 \leq a \leq 1$ の場合だけ積分区間を 2 つに分ける必要がある。候補を出したあと、その候補が自分の仮定した範囲に入っているかを確認することが採点上重要である。

【第 2 問】

xy 平面において、放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ の 2 つの接線 l_1, l_2 が点 P において直交するとする。ただし、 l_1 の傾きは l_2 の傾きより大きいとする。

- (1) 点 P の x 座標を a とするとき、接線 l_1, l_2 の傾きをそれぞれ求めよ。
- (2) 放物線 C と接線 l_1, l_2 の接点をそれぞれ Q_1, Q_2 とする。 $\triangle PQ_1Q_2$ の面積が 8 となるような点 P の座標をすべて求めよ。

▶ 解法 1 (接点の座標を文字で置く)

【方針】

放物線 $y = -\frac{1}{2}x^2$ の $x = u$ における接線をパラメータ表示する。2 接線の接点を u, v とすると、直交条件は $uv = -1$ 、交点の x 座標は $a = \frac{u+v}{2}$ になる。面積は、接線 2 本の交点 P と接点 Q_1, Q_2 の座標を u, v で表して行列式で求め、 $uv = -1$ を用いて $(a^2 + 1)^{3/2}$ に整理する。

【解答】

(1) 放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ の $x = u$ における接線を求める。導関数は $y' = -x$ なので、傾きは $-u$ である。接点は $(u, -\frac{1}{2}u^2)$ だから、接線は $y = -u(x - u) - \frac{1}{2}u^2 = -ux + \frac{1}{2}u^2$ である。

2 つの接点の x 座標を u, v とする。2 接線が直交するので、傾きの積から $(-u)(-v) = uv = -1$ である。また 2 接線の交点の x 座標を a とすると $-ua + \frac{1}{2}u^2 = -va + \frac{1}{2}v^2$ より $a = \frac{u+v}{2}$ である。したがって u, v は $X^2 - 2aX - 1 = 0$ の 2 解であり、 $u = a - \sqrt{a^2 + 1}$, $v = a + \sqrt{a^2 + 1}$ である。接線の傾きはそれぞれ $-u, -v$ である。 l_1 の傾きが l_2 の傾きより大きいので l_1, l_2 の傾きはそれぞれ $-a + \sqrt{a^2 + 1}$, $-a - \sqrt{a^2 + 1}$ である。

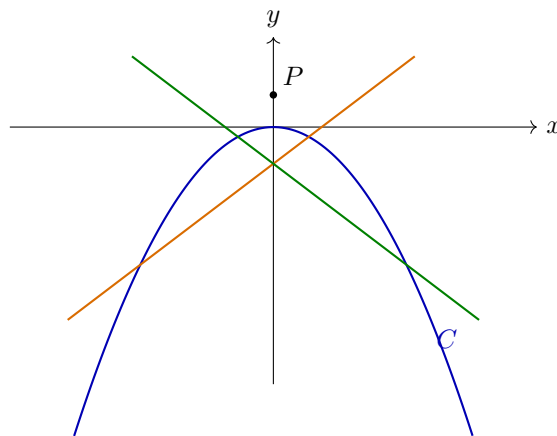
(2) 交点 P の y 座標を求める。 $a = \frac{u+v}{2}$ を接線 $y = -ux + \frac{1}{2}u^2$ に代入すると $y = -u\frac{u+v}{2} + \frac{1}{2}u^2 = -\frac{uv}{2} = \frac{1}{2}$ である。したがって $P = (a, \frac{1}{2})$ である。

接点は $Q_1 = (u, -\frac{1}{2}u^2)$, $Q_2 = (v, -\frac{1}{2}v^2)$ である。三角形の面積を行列式で求めると

$$\begin{aligned} [\triangle PQ_1Q_2] &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} u-a & -\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2} \\ v-a & -\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{8} |v-u|^3 \end{aligned}$$

である。ここで $v-u = 2\sqrt{a^2 + 1}$ だから $[\triangle PQ_1Q_2] = (a^2 + 1)^{3/2}$ である。

これが 8 に等しいので $(a^2 + 1)^{3/2} = 8$ であり、 $a^2 + 1 = 4$ となる。したがって $a = \pm\sqrt{3}$ である。よって求める点 P は $P = (\sqrt{3}, \frac{1}{2}), (-\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ である。



▶ 解法 2 (接線の傾きを直接変数にする)

【方針】

傾き m の接線は接点 $x = -m$ をもち、式は $y = mx + m^2/2$ となる。2 つの傾きの積と和を交点の座標から求め、面積をその 2 根の差で表す。

【解答】

(1) 傾き m の接線の接点は $x = -m$ であり、接線は

$$y = mx + \frac{m^2}{2}$$

である。2 本の傾きを $m_1 > m_2$ とする。直交条件から

$$m_1 m_2 = -1.$$

また交点の x 座標が a なので

$$m_1 a + \frac{m_1^2}{2} = m_2 a + \frac{m_2^2}{2},$$

よって

$$m_1 + m_2 = -2a.$$

したがって m_1, m_2 は

$$m^2 + 2am - 1 = 0$$

の 2 解であり、

$$m_1 = -a + \sqrt{a^2 + 1}, \quad m_2 = -a - \sqrt{a^2 + 1}.$$

(2) 接点は

$$Q_i = \left(-m_i, -\frac{m_i^2}{2} \right)$$

である。交点の y 座標は

$$m_1 a + \frac{m_1^2}{2} = -\frac{m_1 m_2}{2} = \frac{1}{2}$$

だから $P = (a, 1/2)$ である。

座標の行列式を計算すると

$$[\triangle PQ_1 Q_2] = \frac{1}{8} |m_1 - m_2|^3.$$

ここで

$$|m_1 - m_2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

であるから

$$[\triangle PQ_1 Q_2] = (a^2 + 1)^{3/2}.$$

これが 8 となる条件は $a^2 + 1 = 4$ 、すなわち $a = \pm\sqrt{3}$ である。したがって

$$P = \left(\sqrt{3}, \frac{1}{2} \right), \quad P = \left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2} \right).$$

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。接線を接点の x 座標で表すと、直交条件と交点座標がきれいに整理される。 $uv = -1$ と $a = \frac{u+v}{2}$ から 2 接点を決める流れが中心である。面積計算は省略されがちだが、 P の y 座標が常に $\frac{1}{2}$ になること、面積が $\frac{1}{4}|v-u|^3$ になることを示すと、最後の最大計算が明確になる。

【第 3 問】

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考える。

- (1) 辺 OA 上を動く点 P と辺 BC 上を動く点 Q に対して、線分 PQ の長さが最小となるとき、ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ で表せ。
- (2) 点 R が $\triangle ABC$ の内部および辺上を動くとする。(1) で求めた $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{OR}$ のなす角を θ とする。内積 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OR}$ が最大となるような $\cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

▶ 解法 1 (基本ベクトルの内積を使う)

【方針】

正四面体なので、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の長さはすべて 1 で、相異なる 2 つの内積は $\frac{1}{2}$ である。点 P と Q を辺上のパラメータで表し、線分 PQ が最短となる条件を、 PQ が辺 OA と辺 BC の方向に垂直であることとして立てる。(2) は R を三角形 ABC の重心座標で表し、内積が最大になるのは R が辺 BC 上にあるときだと分かるので、そのときの $|OR|$ の範囲から $\cos \theta$ の範囲を出す。

【解答】

- (1)
- $$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{OC}$$
- とおく。正四面体の 1 辺の長さは 1 なので $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であり、相異なる 2 つのベクトルのなす角は 60° だから $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$ である。 P は辺 OA 上にあるから $\overrightarrow{OP} = s\vec{a} \quad (0 \leq s \leq 1)$ とおける。また Q は辺 BC 上にあるから $\overrightarrow{OQ} = (1-u)\vec{b} + u\vec{c} \quad (0 \leq u \leq 1)$ とおける。よって $\overrightarrow{PQ} = -s\vec{a} + (1-u)\vec{b} + u\vec{c}$ である。
- 線分 PQ が最短となるとき、 $\overrightarrow{PQ}$ は辺 OA の方向 $\vec{a}$ と辺 BC の方向 $\vec{c} - \vec{b}$ の両方に垂直である。したがって

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} = 0, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

である。計算すると $-s + \frac{1}{2} = 0$, $\frac{2u-1}{2} = 0$ となるので $s = \frac{1}{2}$, $u = \frac{1}{2}$ である。したがって

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

である。

- (2) R は三角形 ABC の内部または辺上を動くので

$$\overrightarrow{OR} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}, \quad \lambda, \mu, \nu \geq 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 1$$

とおける。(1) で求めたベクトルを $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \overrightarrow{OR} &= \frac{\mu + \nu}{2} \\ &= \frac{1 - \lambda}{2} \end{aligned}$$

である。したがって内積が最大となるのは $\lambda = 0$ のとき、すなわち R が辺 BC 上にあるときであり、その最大値は $\frac{1}{2}$ である。

また

$$|\vec{v}|^2 = \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

だから $|\vec{v}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。 R が辺 BC 上を動くとき、 $|\overrightarrow{OR}|$ は辺の中点で最小、端点で最大となる。中点では

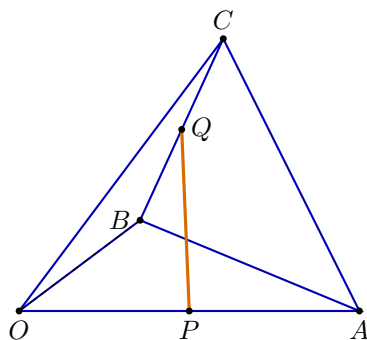
$$\left| \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \right|^2 = \frac{1+1+2 \cdot \frac{1}{2}}{4} = \frac{3}{4}$$

なので $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq |\overrightarrow{OR}| \leq 1$ である。

内積が最大となる場合に

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{OR}}{|\vec{v}| |\overrightarrow{OR}|} = \frac{1/2}{(1/\sqrt{2}) |\overrightarrow{OR}|} = \frac{1}{\sqrt{2} |\overrightarrow{OR}|}$$

である。したがって $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos \theta \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ である。



▶ 解法 2 (正四面体を座標化する)

【方針】

正四面体を具体的な座標に置き、辺上の点 P, Q を 2 変数で表す。距離の 2 乗を平方完成して両辺の中点を得た後、重心座標で R を表して内積と長さを評価する。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned} O &= (0, 0, 0), & A &= (1, 0, 0), \\ B &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), & C &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \end{aligned}$$

とおく。これは各辺の長さが 1 の正四面体である。

$P = (s, 0, 0)$ 、 $Q = (1-u)B + uC$ とおくと

$$|PQ|^2 = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

したがって最小となるのは $s = u = 1/2$ のときである。ゆえに

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

(2)

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}, \quad \overrightarrow{OR} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$$

とおく。ただし $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ 、 $\lambda + \mu + \nu = 1$ である。正四面体の内積を用いると

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{b} = \vec{v} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}.$$

よって

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OR} = \frac{\mu + \nu}{2} = \frac{1 - \lambda}{2}.$$

最大値 $1/2$ は $\lambda = 0$ 、すなわち R が辺 BC 上にあるときに得られる。

このとき $|\vec{v}| = 1/\sqrt{2}$ であり、 R が BC 上を動くとき

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq |OR| \leq 1.$$

したがって

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} |OR|}$$

より

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos \theta \leq \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

【総評】 難度 7、目安時間 26 分。正四面体のベクトル計算では、長さ 1 と内積 $\frac{1}{2}$ を最初に固定すると式が安定する。(1) の最短条件は、最短線分が両方の辺の方向に垂直になるという空間図形の基本である。(2) は内積最大の条件と $\cos \theta$ の範囲が別段階である点に注意したい。内積最大は辺 BC 上で起こり、その中で $|OR|$ が動くため、 $\cos \theta$ には幅が生じる。

【第 4 問】

k, n を正の整数とする。整数 $a_1, a_2, \dots, a_k$ と整数 $b_1, b_2, \dots, b_k$ を並べた次のような表を考える。

以下の条件 (i), (ii), (iii) を同時に満たすようなすべての表の個数を $A_{n,k}$ とする。

- (i) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n$
- (ii) $1 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k \leq n$
- (iii) $a_i < b_i$ と $a_j > b_j$ を満たすような i, j が存在する。

以下の問いに答えよ。

- (1) $A_{n,2}$ を求めよ。
- (2) $A_{n,k}$ が偶数であることを示せ。
- (3) $A_{3,3}$ を求めよ。

▶ 解法 1 (補集合を包除原理で数える)

【方針】

条件 (iii) は「どこかで $a_i < b_i$ があり、別のどこかで $a_j > b_j$ がある」という条件である。補集合は、すべての i で $a_i \leq b_i$ となる場合、またはすべての i で $a_i \geq b_i$ となる場合である。対称性によりこの 2 つは同数で、重なりは $a_i = b_i$ が全ての i で成り立つ場合である。(2) は上下段を入れ替える対応で偶数性を示し、(3) は $n = 3, k = 3$ の非減少列 10 個を表にして補集合を数える。

【解答】

(1) まず条件 (i),(ii) だけを満たす表を数える。 $k = 2$ では $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq n$ を満たす組は ${}_{n+1}C_2 = \frac{n(n+1)}{2}$ 個あり、 b_1, b_2 も同じだけある。したがって全体は $\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$ 個である。

次に、すべての i で $a_i \leq b_i$ となる表を数える。固定した b_1, b_2 に対して、 $a_1 \leq a_2, a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$ を満たす組を数えると、合計は $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ である。上下を入れ替えれば、すべての i で $a_i \geq b_i$ となる表も同じ個数である。また両方に含まれるのは $a_i = b_i$ が全ての i で成り立つ場合で、その個数は $\frac{n(n+1)}{2}$ である。

条件 (iii) を満たさない表は、すべて $a_i \leq b_i$ であるか、すべて $a_i \geq b_i$ である表である。よって包除原理により

$$\begin{aligned} A_{n,2} &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - 2 \cdot \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{12} \end{aligned}$$

である。

(2) 条件 (i),(ii),(iii) を満たす表に対して、上段と下段を入れ替える対応を考える。つまり $(a_1, \dots, a_k), (b_1, \dots, b_k)$ を $(b_1, \dots, b_k), (a_1, \dots, a_k)$ に対応させる。この対応は再び条件 (i),(ii),(iii) を満たす表を与える。

また、条件 (iii) を満たす表では、上下段を入れ替えても元の表と同じになることはない。もし同じなら全ての i で $a_i = b_i$ となり、条件 (iii) に反するからである。したがって表は 2 つずつ組になる。よって $A_{n,k} \equiv 0 \pmod{2}$ すなわち $A_{n,k}$ は偶数である。

(3) $n = 3, k = 3$ とする。条件 (i) を満たす非減少列は 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333 の 10 通りである。したがって条件 (i),(ii) だけを満たす表は $10^2 = 100$ 個である。

次に、すべての i で $a_i \leq b_i$ となる表を数える。上の 10 個の b の列に対して可能な a の個数は順に 1, 2, 3, 3, 5, 6, 4, 7, 9, 10

である。したがってその合計は $1 + 2 + 3 + 3 + 5 + 6 + 4 + 7 + 9 + 10 = 50$ である。すべて $a_i \geq b_i$ の場合も同じく 50 個である。両方に含まれるのは $a_i = b_i$ が全ての i で成り立つ 10 通りである。

よって $A_{3,3} = 100 - 2 \cdot 50 + 10 = 10$ である。

▶ 解法 2 (交差する並びを直接数える)

【方針】

$k = 2$ では大小関係が途中で入れ替わる 2 方向を直接数える。片方の向きは 4 つの整数の狭義増加列へ写せる。(2) は上下交換の対合、(3) は 10 個の非減少列から交差する組を列挙する。

【解答】

(1) $k = 2$ で条件 (iii) が成り立つ一方の向きは

$$a_1 < b_1 \leq b_2 < a_2$$

である。ここで

$$(a_1, b_1, b_2 + 1, a_2 + 1)$$

は $1, 2, \dots, n + 1$ から選んだ 4 個の狭義増加列になる。逆の対応も成り立つから、この向きの表は

$${}_{n+1}C_4$$

個である。

もう一方の向き $a_1 > b_1, a_2 < b_2$ も同数なので

$$A_{n,2} = 2 {}_{n+1}C_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{12}.$$

(2) 条件を満たす表の上下段を交換する。この操作を 2 回行えば元に戻る。一方、交換しても変わらない表なら $a_i = b_i$ がすべての i で成り立ち、条件 (iii) に反する。したがって固定点のない 2 個組ができるので $A_{n,k}$ は偶数である。

(3) $1, 2, 3$ から作る長さ 3 の非減少列は 10 個である。最初に上段が小さく、後で大きくなる組は

$$\begin{array}{c|ccccc} (a_1 a_2 a_3) & 113 & 113 & 123 & 133 & 133 \\ (b_1 b_2 b_3) & 122 & 222 & 222 & 222 & 223 \end{array}$$

の 5 組である。上下を交換した 5 組も条件を満たすから

$$A_{3,3} = 2 \cdot 5 = 10.$$

【総評】 難度 7、目安時間 28 分。条件 (iii) を直接数えるのではなく、符号が片側にそろった補集合を数えるのが中心である。

(1) では包除原理の「引きすぎた全一致を戻す」処理を忘れないこと。(2) の偶数性は、上下段入れ替えが固定点を持たない対合になることを示せばよい。(3) は 10 個の非減少列を具体的に並べ、 $a_i \leq b_i$ の個数を表で数えると、計算の根拠が明確になる。