

東北大学 2019 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面において、放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ の 2 つの接線 l_1, l_2 が点 P において直交するとする。ただし、 l_1 の傾きは l_2 の傾きより大きいとする。

- (1) 点 P の x 座標を a とするとき、接線 l_1, l_2 の傾きをそれぞれ求めよ。
- (2) 放物線 C と接線 l_1, l_2 の接点をそれぞれ Q_1, Q_2 とし、接線 l_1, l_2 と x 軸の交点をそれぞれ R_1, R_2 とする。また、原点 $(0, 0)$ を O とする。2 つの線分 Q_1R_1, OR_1 と放物線 C で囲まれる図形の面積を S_1 とし、2 つの線分 Q_2R_2, OR_2 と放物線 C で囲まれる図形の面積を S_2 とする。面積の和 $S_1 + S_2$ が最小となるときの点 P の座標と $S_1 + S_2$ の最小値を求めよ。

▶ 解法 1（接点ごとの面積を積分する）

【方針】

(1) は後期文系第 2 問と同じく、接点の x 座標を u, v として接線を表す。(2) では、接点 u の接線と x 軸、原点、放物線で囲まれる面積を $|u|^3/24$ と求める。直交条件から $uv = -1$ なので、 $u < 0 < v$ として $v = r > 0$ に置き換え、 $r^3 + r^{-3}$ の最小値を調べる。

【解答】

(1) 放物線 $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ の $x = u$ における接線は $y = -ux + \frac{1}{2}u^2$ である。2 つの接点の x 座標を u, v とすると、直交条件から $uv = -1$ であり、2 接線の交点の x 座標 a は $a = \frac{u+v}{2}$ である。したがって u, v は $X^2 - 2aX - 1 = 0$ の 2 解であり、 $u = a - \sqrt{a^2 + 1}, v = a + \sqrt{a^2 + 1}$ である。傾きは $-u, -v$ で、 l_1 の傾きが l_2 の傾きより大きいので l_1, l_2 の傾きはそれぞれ $-a + \sqrt{a^2 + 1}, -a - \sqrt{a^2 + 1}$ である。

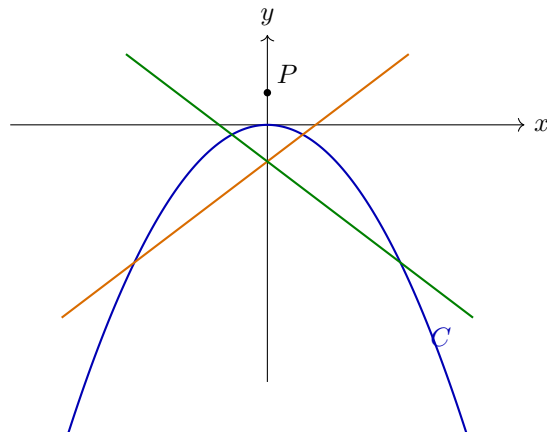
(2) 接点の x 座標を u とする。接線は $y = -ux + \frac{1}{2}u^2$ であり、 x 軸との交点は $x = \frac{u}{2}$ である。この接線、 x 軸、放物線で囲まれる面積を求めると、 $u > 0$ の場合は

$$\int_0^{u/2} \frac{x^2}{2} dx + \int_{u/2}^u \left(-ux + \frac{1}{2}u^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{u^3}{24}$$

である。 $u < 0$ の場合も左右が反転するだけなので、面積は $\frac{|u|^3}{24}$ である。

2 つの接点について、 $uv = -1$ であるから一方は負、一方は正である。 $v = r > 0$ とおくと $u = -\frac{1}{r}$ であり、 $S_1 + S_2 = \frac{1}{24} \left(r^3 + \frac{1}{r^3} \right)$ である。相加平均・相乗平均より $r^3 + \frac{1}{r^3} \geq 2$ であり、等号は $r = 1$ のときである。したがって最小値は $\frac{1}{12}$ である。

このとき $u = -1, v = 1$ なので $a = \frac{u+v}{2} = 0$ であり、交点 P の y 座標は $\frac{1}{2}$ である。よって $P = (0, \frac{1}{2})$ である。



▶ 解法 2 (面積を交点の横座標だけで表す)

【方針】

接点 u, v に対する各面積が $|u|^3/24, |v|^3/24$ であるところまでは積分で求める。その後 $u = a - \sqrt{a^2 + 1}, v = a + \sqrt{a^2 + 1}$ を直接代入し、面積和を a^2 の増加関数として最小化する。

【解答】

(1) 接点の x 座標を u, v とすると、接線は

$$y = -ux + \frac{u^2}{2}, \quad y = -vx + \frac{v^2}{2}.$$

直交条件と交点の x 座標から

$$uv = -1, \quad u + v = 2a.$$

よって

$$u = a - \sqrt{a^2 + 1}, \quad v = a + \sqrt{a^2 + 1}.$$

傾きは $-u, -v$ だから、指定された順に

$$-a + \sqrt{a^2 + 1}, \quad -a - \sqrt{a^2 + 1}.$$

(2) 接点 u に対応する図形の面積は、接線と放物線の差を積分して

$$\frac{|u|^3}{24}$$

である。 $d = \sqrt{a^2 + 1}$ とおくと $u = a - d < 0, v = a + d > 0$ なので

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{(d - a)^3 + (d + a)^3}{24} \\ &= \frac{d(4a^2 + 1)}{12}. \end{aligned}$$

$d = \sqrt{a^2 + 1} \geq 1, 4a^2 + 1 \geq 1$ であり、両方の等号は $a = 0$ のとき同時に成り立つ。したがって

$$S_1 + S_2 \geq \frac{1}{12}.$$

$a = 0$ のとき交点の y 座標は $-uv/2 = 1/2$ だから

$$P = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad (S_1 + S_2)_{\min} = \frac{1}{12}.$$

【総評】 難度 6、目安時間 24 分。接線のパラメータ表示から直交条件 $uv = -1$ を作るところまでは文系問題と同じである。理系では面積を接点の座標 u で表す計算が加わる。 x 軸との交点が $u/2$ になること、囲まれる面積が $|u|^3/24$ になることをきちんと積分で示すと、その後は相反する正数の和の最小化に帰着する。

【第 2 問】

n を正の整数とする。

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right\} \sin \frac{x}{2} = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)$$

(2) 次の方程式の解 x をすべて求めよ。

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = 0$$

▶ 解法 1 (積和公式で望遠和を作る)

【方針】

(1) は積和公式 $2 \sin \frac{x}{2} \cos kx$ を使い、 $k = 1$ から n まで足すと中間項が消えることを示す。(2) では $x = 2m\pi$ が解でないことを先に除外し、(1) の恒等式に $\sum \cos(kx) = 0$ を代入する。あとは $\sin A = \sin B$ の一般解を 2 種類に分け、最初の種類では $x = 2m\pi$ を除外する。

【解答】

(1) 積和公式より

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x$$

である。これを $k = 1, 2, \dots, n$ について足すと、右辺の中間項が打ち消し合い、

$$2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \sin \frac{x}{2} = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}$$

を得る。両辺に $\sin \frac{x}{2}$ を加えると

$$\left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right\} \sin \frac{x}{2} = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x$$

である。よって示された等式が成り立つ。

(2) $x = 2m\pi$ のとき、 $\cos(kx) = 1$ だから $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = n$ となり、解ではない。したがって以下では $\sin \frac{x}{2} \neq 0$ としよ。 $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = 0$ とすると、(1) より $\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x = \sin \frac{x}{2}$ である。 $\sin A = \sin B$ の一般解を用いると、 $\left(n + \frac{1}{2} \right) x = \frac{x}{2} + 2l\pi$ または $\left(n + \frac{1}{2} \right) x = \pi - \frac{x}{2} + 2l\pi$ である。前者から $x = \frac{2l\pi}{n}$ を得る。ただし l が n の倍数のときは $x = 2m\pi$ となり解ではない。

後者からは $(n+1)x = (2l+1)\pi$ なので $x = \frac{(2l+1)\pi}{n+1}$ を得る。こちらは $x = 2m\pi$ にはならない。

以上より、求める解は

$$x = \frac{2l\pi}{n} \quad (l \in \mathbb{Z}, n \nmid l), \quad x = \frac{(2l+1)\pi}{n+1} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

である。

▶ 解法 2 (余弦の和の公式で因数分解する)

【方針】

余弦の等差数列の和を $\sin(nx/2) \cos((n+1)x/2) / \sin(x/2)$ と表す。(1) を導いた後、(2) は分子の 2 因子をそれぞれ 0 とし、分母が 0 になる値だけを除く。

【解答】

(1) $\sin(x/2) \neq 0$ のとき、余弦の和の公式から

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

したがって

$$\begin{aligned} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)\right) \sin \frac{x}{2} &= \sin \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2} \\ &= \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x. \end{aligned}$$

$\sin(x/2) = 0$ の場合も両辺は 0 なので、等式はすべての実数 x で成り立つ。

(2) $x = 2m\pi$ では和が n となるため解ではない。したがって $\sin(x/2) \neq 0$ としてよい。和の公式から

$$\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2} = 0.$$

第 1 因子が 0 なら

$$x = \frac{2l\pi}{n}.$$

ただし l が n の倍数なら $x = 2m\pi$ となるので除く。第 2 因子が 0 なら

$$x = \frac{(2l+1)\pi}{n+1}.$$

ゆえに

$$x = \frac{2l\pi}{n} \quad (l \in \mathbb{Z}, n \nmid l), \quad x = \frac{(2l+1)\pi}{n+1} \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

【総評】 難度 5、目安時間 16 分。三角関数の和を積和公式で望遠和にする標準問題である。(2) では $\sin \frac{x}{2} = 0$ の場合を先に除外しないと、(1) からの変形で余計な解を含めやすい。 $\sin A = \sin B$ の一般解は 2 系列あり、 $x = \frac{2l\pi}{n}$ の系列だけ l が n の倍数でないという除外条件が必要になる。

【第 3 問】

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考える。

- (1) 辺 OA 上を動く点 P と辺 BC 上を動く点 Q に対して、線分 PQ の長さが最小となるとき、ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ で表せ。
- (2) 点 R が $\triangle ABC$ の内部および辺上を動くとする。(1) で求めた $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{OR}$ のなす角を θ とする。内積 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OR}$ が最大となるような $\cos \theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

▶ 解法 1 (基本ベクトルの内積を使う)

【方針】

正四面体なので、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の長さはすべて 1 で、相異なる 2 つの内積は $\frac{1}{2}$ である。点 P と Q を辺上のパラメータで表し、線分 PQ が最短となる条件を、 PQ が辺 OA と辺 BC の方向に垂直であることとして立てる。(2) は R を三角形 ABC の重心座標で表し、内積が最大になるのは R が辺 BC 上にあるときだと分かるので、そのときの $|OR|$ の範囲から $\cos \theta$ の範囲を出す。

【解答】

- (1)
- $$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{OC}$$
- とおく。正四面体の 1 辺の長さは 1 なので $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ であり、相異なる 2 つのベクトルのなす角は 60° だから $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$ である。 P は辺 OA 上にあるから $\overrightarrow{OP} = s\vec{a} \quad (0 \leq s \leq 1)$ とおける。また Q は辺 BC 上にあるから $\overrightarrow{OQ} = (1-u)\vec{b} + u\vec{c} \quad (0 \leq u \leq 1)$ とおける。よって $\overrightarrow{PQ} = -s\vec{a} + (1-u)\vec{b} + u\vec{c}$ である。
- 線分 PQ が最短となるとき、 $\overrightarrow{PQ}$ は辺 OA の方向 $\vec{a}$ と辺 BC の方向 $\vec{c} - \vec{b}$ の両方に垂直である。したがって

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} = 0, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$$

である。計算すると $-s + \frac{1}{2} = 0, \quad \frac{2u-1}{2} = 0$ となるので $s = \frac{1}{2}, \quad u = \frac{1}{2}$ である。したがって

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

である。

- (2) R は三角形 ABC の内部または辺上を動くので

$$\overrightarrow{OR} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}, \quad \lambda, \mu, \nu \geq 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 1$$

とおける。(1) で求めたベクトルを $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ とおく。このとき

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \overrightarrow{OR} &= \frac{\mu + \nu}{2} \\ &= \frac{1 - \lambda}{2} \end{aligned}$$

である。したがって内積が最大となるのは $\lambda = 0$ のとき、すなわち R が辺 BC 上にあるときであり、その最大値は $\frac{1}{2}$ である。

また

$$|\vec{v}|^2 = \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right|^2 = \frac{1}{2}$$

だから $|\vec{v}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。 R が辺 BC 上を動くとき、 $|\overrightarrow{OR}|$ は辺の中点で最小、端点で最大となる。中点では

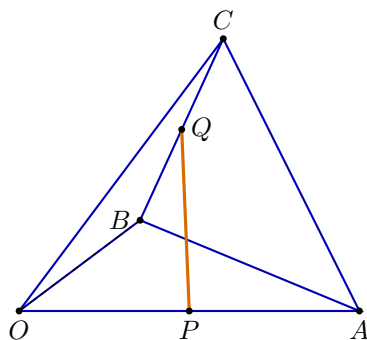
$$\left| \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \right|^2 = \frac{1+1+2 \cdot \frac{1}{2}}{4} = \frac{3}{4}$$

なので $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq |\overrightarrow{OR}| \leq 1$ である。

内積が最大となる場合に

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{OR}}{|\vec{v}| |\overrightarrow{OR}|} = \frac{1/2}{(1/\sqrt{2}) |\overrightarrow{OR}|} = \frac{1}{\sqrt{2} |\overrightarrow{OR}|}$$

である。したがって $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos \theta \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ である。



▶ 解法 2 (正四面体を座標化する)

【方針】

正四面体を具体的な座標に置き、辺上の点 P, Q を 2 変数で表す。距離の 2 乗を平方完成して両辺の中点を得た後、重心座標で R を表して内積と長さを評価する。

【解答】

(1)

$$\begin{aligned} O &= (0, 0, 0), & A &= (1, 0, 0), \\ B &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), & C &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \end{aligned}$$

とおく。これは各辺の長さが 1 の正四面体である。

$P = (s, 0, 0)$ 、 $Q = (1-u)B + uC$ とおくと

$$|PQ|^2 = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

したがって最小となるのは $s = u = 1/2$ のときである。ゆえに

$$\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}.$$

(2)

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}, \quad \overrightarrow{OR} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$$

とおく。ただし $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ 、 $\lambda + \mu + \nu = 1$ である。正四面体の内積を用いると

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{v} \cdot \vec{b} = \vec{v} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}.$$

よって

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{OR} = \frac{\mu + \nu}{2} = \frac{1 - \lambda}{2}.$$

最大値 $1/2$ は $\lambda = 0$ 、すなわち R が辺 BC 上にあるときに得られる。

このとき $|\vec{v}| = 1/\sqrt{2}$ であり、 R が BC 上を動くとき

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq |OR| \leq 1.$$

したがって

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} |OR|}$$

より

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos \theta \leq \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

【総評】 難度 7、目安時間 26 分。正四面体のベクトル計算では、長さ 1 と内積 $\frac{1}{2}$ を最初に固定すると式が安定する。(1) の最短条件は、最短線分が両方の辺の方向に垂直になるという空間図形の基本である。(2) は内積最大の条件と $\cos \theta$ の範囲が別段階である点に注意したい。内積最大は辺 BC 上で起こり、その中で $|OR|$ が動くため、 $\cos \theta$ には幅が生じる。

【第 4 問】

関数 $f(x)$ は連続な第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち、すべての実数 x に対して $f''(x)$ の値が正であるとする。

(1) 異なる 2 つの実数 x, y に対して、次の関数を考える。

$$p(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty) \quad (t \text{ は実数}) \quad \dots\dots (*)$$

このとき

$$p'(0) > 0, \quad p'(1) < 0$$

が成り立つことを示せ。

(2) $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して、(*) で与えた関数 $p(t)$ の値が正であることを示せ。

(3) $a < b < c < d$ を満たす実数 a, b, c, d に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$f(d-a) + f(c-b) > f(d-b) + f(c-a)$$

▶ 解法 1 (導関数の増加と差分関数を使う)

【方針】

$f''(x) > 0$ から $f'(x)$ が狭義単調増加であることを使う。(1) は $p'(t)$ を計算し、平均値の定理で $f(y) - f(x) = (y-x)f'(\xi)$ と書いて端点での符号を判定する。(2) は $p''(t) < 0$ から p のグラフが上に凸で、端点 $p(0) = p(1) = 0$ を結ぶ弦より上にあることを用いる。(3) は差分 $F(u) = f(u+\delta) - f(u)$ を作り、 F が増加することに帰着する。

【解答】

(1) $p(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty)$ である。微分すると $p'(t) = f(y) - f(x) - (y-x)f'((1-t)x + ty)$ である。

平均値の定理より、 x と y の間にある実数 ξ が存在して $f(y) - f(x) = (y-x)f'(\xi)$ と書ける。また $f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は狭義単調増加である。

まず $x < y$ とする。このとき $x < \xi < y$ なので $p'(0) = (y-x)\{f'(\xi) - f'(x)\} > 0$ であり、 $p'(1) = (y-x)\{f'(\xi) - f'(y)\} < 0$ である。 $y < x$ の場合も、 $y-x < 0$ であることと $y < \xi < x$ を用いれば同じく $p'(0) > 0, \quad p'(1) < 0$ が得られる。

(2) さらに微分すると $p''(t) = -(y-x)^2 f''((1-t)x + ty) < 0$ である。したがって $p(t)$ のグラフは上に凸である。また $p(0) = 0, \quad p(1) = 0$ である。上に凸で直線ではないグラフは、端点を結ぶ線分よりも内部で上にある。端点を結ぶ線分は $y=0$ であるから、 $0 < t < 1$ では $p(t) > 0$ である。

(3) $\delta = b-a > 0$ とおき、 $F(u) = f(u+\delta) - f(u)$ を考える。微分すると $F'(u) = f'(u+\delta) - f'(u)$ である。 f' は狭義単調増加で、 $u+\delta > u$ だから $F'(u) > 0$ である。したがって $F(u)$ は狭義単調増加である。 $a < b < c < d$ より $d-b > c-b$ である。よって $F(d-b) > F(c-b)$ である。これを展開すると $f(d-a) - f(d-b) > f(c-a) - f(c-b)$ であり、移項して $f(d-a) + f(c-b) > f(d-b) + f(c-a)$ を得る。

▶ 解法 2 (狭義凸性を 2 回適用する)

【方針】

(1)(2) で $f > 0$ から狭義凸性を示す。(3) では $d-b$ と $c-a$ が、 $d-a$ と $c-b$ を互いに逆の比で内分することを確認、(2) を 2 本足す。

【解答】

(1)

$$p'(t) = f(y) - f(x) - (y-x)f'((1-t)x + ty).$$

平均値の定理により、 x, y の間の ξ を用いて

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'(\xi)$$

と書ける。 $f'' > 0$ だから f' は狭義単調増加である。 $x < y$ と $y < x$ のどちらでも符号を合わせて比較すれば

$$p'(0) > 0, \quad p'(1) < 0.$$

(2)

$$p''(t) = -(y-x)^2 f''((1-t)x + ty) < 0.$$

したがって p は狭義に上に凸であり、 $p(0) = p(1) = 0$ だから

$$p(t) > 0 \quad (0 < t < 1).$$

すなわち、相異なる X, Y と $0 < t < 1$ に対し

$$f((1-t)X + tY) < (1-t)f(X) + tf(Y)$$

である。

(3)

$$X = d - a, \quad Y = c - b$$

とおく。 $X > Y$ であり、

$$\lambda = \frac{d-c}{(b-a) + (d-c)}$$

とおけば $0 < \lambda < 1$ である。直接計算すると

$$d-b = \lambda X + (1-\lambda)Y,$$

また

$$c-a = (1-\lambda)X + \lambda Y.$$

(2) をそれぞれに適用して

$$\begin{aligned} f(d-b) &< \lambda f(X) + (1-\lambda)f(Y), \\ f(c-a) &< (1-\lambda)f(X) + \lambda f(Y). \end{aligned}$$

辺々を加えれば

$$f(d-b) + f(c-a) < f(d-a) + f(c-b),$$

したがって示す不等式が得られる。

【総評】 難度 7、目安時間 24 分。 $f'' > 0$ から f' が増加するという基本事実を、平均値の定理や差分の増加にどう使うかが問われる。(1) では $x < y$ と $y < x$ の符号を雑に扱うと危険なので、平均値の定理で中間点を置くのが安全である。(2) は $p'' < 0$ と端点値 0 から内部正を読む問題。(3) は 4 変数をそのまま扱わず、 $b-a$ の差分関数を作ると一行の増加性に帰着する。

【第 5 問】

1 枚のコインを投げる試行を繰り返し、数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める。

- (i) 1 回目の試行において表が出たとき、 $a_1 = 0$ とする。
- (ii) 1 回目の試行において裏が出たとき、 $a_1 = 1$ とする。
- (iii) $n \geq 2$ について、 n 回目の試行において表が出たとき、 $a_n = a_{n-1}$ とする。
- (iv) $n \geq 2$ について、 n 回目の試行において裏が出たとき、 $a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$ とする。

以下の問いに答えよ。

- (1) a_{10} が 2^{10} を 3 で割った商に等しくなったとき、1 回目から 10 回目の試行におけるコインの表裏の出方を求めよ。
- (2) 1 回目から 100 回目の試行においてコインの表がちょうど 4 回出たとき、 a_{100} が $\frac{2^{100}}{3}$ より小さくなる条件付き確率を求めよ。

▶ 解法 1 (表の回に対応する 2 の累乗を引く)

【方針】

a_n は、裏が出た回に対応する 2 進法の桁を 1 にした数である。(1) は 2^{10} を 3 で割った商を 2 進法で表せば、裏が出た回が読める。(2) は表が出た回の集合 H を用いて、 $a_{100} = 2^{100} - 1 - \sum_{j \in H} 2^{j-1}$ と表す。条件 $a_{100} < 2^{100}/3$ は高位 4 桁の選び方の不等式になり、最大桁から順に必要な条件を詰めて数える。

【解答】

(1) a_{10} は、裏が出た回に対応する $2^0, 2^1, \dots, 2^9$ を足した数である。 $2^{10} = 1024$ であり、これを 3 で割った商は 341 である。これを 2 の累乗の和で表すと $341 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0$ である。

したがって、裏が出たのは 1, 3, 5, 7, 9 回目であり、表が出たのは 2, 4, 6, 8, 10 回目である。よって出方は、1 回目から順に「裏、表、裏、表、裏、表、裏、表、裏、表」である。

(2) 1 回目から 100 回目のうち、表が出た回の集合を H とする。表はちょうど 4 回なので、 H は $\{1, 2, \dots, 100\}$ の 4 個の元からなる部分集合である。裏が出た回の桁が 1 になるので $a_{100} = 2^{100} - 1 - \sum_{j \in H} 2^{j-1}$ である。 $2^{100} \equiv 1 \pmod{3}$ なので $q = \frac{2^{100} - 1}{3}$ は整数である。 $a_{100} < \frac{2^{100}}{3}$ は、 a_{100} が整数であることから $a_{100} \leq q$ と同値である。したがって $\sum_{j \in H} 2^{j-1} \geq 2^{100} - 1 - q = \frac{2(2^{100} - 1)}{3}$ である。右辺は $\frac{2(2^{100} - 1)}{3} = 2^{99} + 2^{97} + \dots + 2^1$ である。

ここで指数で数えるため、 $E = \{j-1 \mid j \in H\}$ とおく。 E は $0, 1, \dots, 99$ から 4 個選ぶ集合である。条件は $\sum_{e \in E} 2^e \geq 2^{99} + 2^{97} + \dots + 2^1$ である。

まず $99 \in E$ が必要である。もし最大指数が 98 以下なら、最大でも $2^{98} + 2^{97} + 2^{96} + 2^{95} < 2^{99}$ となり、右辺に届かないからである。 $99 \in E$ とする。さらに $98 \in E$ なら、残り 2 個の指数は 0 から 97 までの中から自由に選べる。これは ${}_{98}C_2$ 通りである。

次に $98 \notin E$ とする。このとき $97 \in E$ が必要である。もし最大が 96 以下なら、残り 3 個の和は右辺の 2^{97} に届かないからである。 $99, 97 \in E$ 、 $98 \notin E$ のもとで、残り 2 個を選ぶ。 $96 \in E$ なら、もう 1 個は 0 から 95 まで自由に選べるので 96 通りである。 $96 \notin E$ の場合は、95 と 94 をともに選ぶ場合だけが条件を満たす。実際、 $2^{95} + 2^{94}$ は残りの必要量 $2^{95} + 2^{93} + \dots + 2^1$ 以上であり、94 より小さい指数では足りない。

したがって条件を満たす表の出方は ${}_{98}C_2 + 96 + 1 = 4753 + 97 = 4850$ 通りである。表がちょうど 4 回出る出方は全体で ${}_{100}C_4$ 通りで、どれも同様に確からしい。よって条件付き確率は $\frac{4850}{{}_{100}C_4} = \frac{2}{1617}$ である。

▶ 解法 2 (2 進表示を辞書順に比較する)

【方針】

表を 0、裏を 1 として、1 回目から順に 2 進表示の下位桁から対応させる。(2) では向きを高位桁から読むため、100 回目から 1 回目への $0 \cdot 1$ 列を考え、基準値 $0101 \cdots 01$ と辞書順に比較する。

【解答】

(1) j 回目裏なら 2^{j-1} が加わり、表なら加わらない。したがって a_{10} の 2 進表示は、10 回目から 1 回目の順に表を 0、裏を 1 として並べたものになる。

$$\frac{2^{10} - 1}{3} = 341 = (0101010101)_2.$$

2^{10} を 3 で割った商も 341 なので、1 回目から順に読むと

裏、表、裏、表、裏、表、裏、表、裏、表

である。

(2) a_{100} は整数だから

$$a_{100} < \frac{2^{100}}{3}$$

は

$$a_{100} \leq \frac{2^{100} - 1}{3}$$

と同値である。右辺の 100 桁の 2 進表示は

$$0101 \cdots 0101$$

である。

表がちょうど 4 回という条件は、100 桁中の 0 がちょうど 4 個ということである。高位桁から基準列と比較すると、条件を満たす列は次の 3 種類に尽きる。

先頭の形	残る 0 の置き方
00...	残り 98 桁から 2 個
0100...	残り 96 桁から 1 個
01010011...1	1 通り

したがって有利な出方は

$${}_{98}C_2 + 96 + 1 = 4850$$

通りである。表が 4 回出る全出方は ${}_{100}C_4$ 通りなので

$$\frac{4850}{{}_{100}C_4} = \frac{2}{1617}.$$

【総評】 難度 7、目安時間 30 分。 a_n を 2 進法で読むことが第一の鍵である。(2) は「表が出た回」はその桁を 0 にする操作なので、表の回に対応する 2 の累乗の和が十分大きい条件に変わる。高位桁から順に判定すると、100 回目は必須、99 回目を含む場合は自由度が大きく、99 回目を含まない場合にも追加で $97 \cdot 96$ 回目などのケースが残る。ここを「99 回目と 100 回目が必要」とだけ判断すると数え落としになる。

【第 6 問】

複素数平面上の互いに異なる 4 点 $A(z_1)$, $B(w_1)$, $C(z_2)$, $D(w_2)$ を考える。

(1) 次の等式が成立することを示せ。

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) - |z_1 \overline{w_2} - z_2 \overline{w_1}|^2$$

(2) 2 つの等式

$$|z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) \cdots \cdots (*)$$

$$|z_1| = |w_1| \cdots \cdots (**)$$

が成り立つとき, 2 つの直線 AB と CD は平行であることを示せ。

(3) 2 つの等式 (*), (**) が成り立ち, 4 点 A, B, C, D が同一直線上にないならば, これらの 4 点はある直線に関して対称な四角形の頂点となることを示せ。

▶ 解法 1 (回転して反射軸を読む)

【方針】

(1) は両辺を展開して, 差として現れる項が打ち消されることを確認する。(2) では (1) から, 等号 (*) が成り立つ条件は $z_1 \overline{w_2} - z_2 \overline{w_1} = 0$ であると分かる。図形全体を回転して w_1 を正の実数にし, $|z_1| = |w_1|$ から $z_1 = w_1 e^{i\theta}$ と置くと, 等号条件から $z_2 = e^{i\theta} \overline{w_2}$ が得られる。これは同じ直線に関する反射を表すので, 平行性と対称性が読める。

【解答】

(1) 右辺の最後の項を展開する。

$$\begin{aligned} |z_1 \overline{w_2} - z_2 \overline{w_1}|^2 &= (z_1 \overline{w_2} - z_2 \overline{w_1})(\overline{z_1} w_2 - \overline{z_2} w_1) \\ &= |z_1|^2 |w_2|^2 + |z_2|^2 |w_1|^2 - z_1 \overline{z_2} \overline{w_2} w_1 - \overline{z_1} z_2 w_2 \overline{w_1} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} &(|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) - |z_1 \overline{w_2} - z_2 \overline{w_1}|^2 \\ &= |z_1|^2 |w_1|^2 + |z_2|^2 |w_2|^2 + z_1 \overline{z_2} \overline{w_2} w_1 + \overline{z_1} z_2 w_2 \overline{w_1} \\ &= |z_1 w_1 + z_2 w_2|^2 \end{aligned}$$

である。よって示す等式が成り立つ。

(2) (1) より, 等式 (*) が成り立つことは $|z_1 \overline{w_2} - z_2 \overline{w_1}|^2 = 0$ すなわち $z_1 \overline{w_2} = z_2 \overline{w_1}$ と同値である。

図形全体を原点のまわりに回転しても, 平行性や対称性は変わらない。そこで w_1 を正の実数としてよい。 $|z_1| = |w_1|$ より, ある実数 θ を用いて $z_1 = w_1 e^{i\theta}$ と書ける。4 点は互いに異なるので $z_1 \neq w_1$ であり, $e^{i\theta} \neq 1$ としてよい。等号条件から $z_2 = e^{i\theta} \overline{w_2}$ である。

直線 AB の方向を表す複素数は $w_1 - z_1 = w_1(1 - e^{i\theta})$ である。一方, $w_2 = \rho e^{i\phi}$ と書けば

$$w_2 - z_2 = \rho e^{i\phi} - \rho e^{i(\theta-\phi)} = 2i\rho e^{i\theta/2} \sin\left(\phi - \frac{\theta}{2}\right)$$

であり, $w_1 - z_1 = -2iw_1 e^{i\theta/2} \sin \frac{\theta}{2}$ である。したがって $w_2 - z_2$ と $w_1 - z_1$ の比は実数である。よって 2 つの直線 AB と CD は平行である。

(3) (2) と同じ表示を用いる。直線 $\arg z = \frac{\theta}{2}$ を考える。この直線に関する反射は, 複素数 z を $z \mapsto e^{i\theta} \overline{z}$ へ移す操作である。 w_1 は正の実数であり, $z_1 = e^{i\theta} \overline{w_1}$ であるから, 点 A と点 B はこの直線に関して対称である。また $z_2 = e^{i\theta} \overline{w_2}$ であるから, 点 C と点 D も同じ直線に関して対称である。

4 点が同一直線上にないなら, これら 4 点は退化せず, 2 組の対称な点の組として 1 つの四角形の頂点になる。したがって, 4 点 A, B, C, D はある直線に関して対称な四角形の頂点となる。

▶ 解法 2 (反射写像を直接作る)

【方針】

(1) の等式から等号条件を取り出す。 $|z_1| = |w_1|$ を使って絶対値 1 の複素数 $\eta = z_1/\overline{w_1}$ を作ると、2 組の点と同じ写像 $z \mapsto \eta\bar{z}$ で移り合うことが分かる。

【解答】

(1) 右辺を展開すると

$$\begin{aligned} & (|z_1|^2 + |z_2|^2)(|w_1|^2 + |w_2|^2) - |z_1\overline{w_2} - z_2\overline{w_1}|^2 \\ &= |z_1w_1|^2 + |z_2w_2|^2 + z_1\overline{w_1}z_2\overline{w_2} + \overline{z_1}w_1\overline{z_2}w_2 \\ &= |z_1w_1 + z_2w_2|^2. \end{aligned}$$

(2) (1) と等式 (*) から

$$z_1\overline{w_2} = z_2\overline{w_1}$$

を得る。もし $w_1 = 0$ なら (**) から $z_1 = 0$ となって A と B が一致するので、 $w_1 \neq 0$ である。そこで

$$\eta = \frac{z_1}{\overline{w_1}}$$

とおく。(**) より $|\eta| = 1$ であり、

$$z_1 = \eta\overline{w_1}, \quad z_2 = \eta\overline{w_2}.$$

写像

$$T(z) = \eta\bar{z}$$

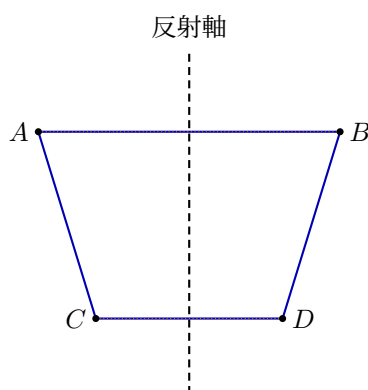
は、 $\eta = e^{i\theta}$ と書けば直線 $\arg z = \theta/2$ に関する反射である。したがって線分 AB と CD はいずれもこの反射軸に垂直であり、

$$AB \parallel CD.$$

(3) 上で作った同じ反射 T が

$$T(w_1) = z_1, \quad T(w_2) = z_2$$

を満たす。すなわち A と B、C と D は同一の直線に関してそれぞれ対称である。4 点が同一直線上にないという条件により退化しない四角形を作るので、4 点はこの直線に関して対称な四角形の頂点となる。



【総評】 難度 8、目安時間 34 分。(1) の恒等式は複素数版の平方展開で、等号条件を読み取るための準備である。(2) では等号条件を $z_1\overline{w_2} = z_2\overline{w_1}$ とし、回転して w_1 を正の実数にしてから極形式で見ると、平行性が実数倍の確認に帰着する。(3) では $z \mapsto e^{i\theta}\bar{z}$ がある直線に関する反射であることを明示するのが重要である。計算と図形解釈を結びつける力が問われる。