

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2019 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面における曲線 $y = \sin x$ の 2 つの接線が直交するとき，その交点の y 座標の値をすべて求めよ。

第 2 問

a を 1 ではない正の実数とし， n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x - n) > \frac{1}{2} \log_a(2n - x)$$

- (1) $n = 6$ のとき，この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。
- (2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

第 3 問

a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $a > 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ。
- (2) $-1 < a < 0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ。
- (3) $-1 < a < 0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。

第 4 問

実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す。

(1) $[2x^2 + x + 3]$, $[x^5 - 1]$, $[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]]$ をそれぞれ求めよ。

(2) 整式 $A(x)$, $B(x)$ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ。

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

(3) 実数 θ に対して, 次の等式が成り立つことを示せ。

$$[(x \sin \theta + \cos \theta)^2] = x \sin 2\theta + \cos 2\theta$$

(4) 次の等式を満たす実数 a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。

$$[(ax + b)^4] = -1$$

第 5 問

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^1 (e^x - e^t + 1)f(t)dt$$

第 6 問

10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し、新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに、袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする。この試行を m 回繰り返したとき、取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m, k)$ とする。2 以上の整数 n に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) $p(n+1, 2)$ を $p(n, 2)$ と $p(n, 1)$ を用いて表せ。
- (2) $p(n, 1)$ を求めよ。
- (3) $p(n, 2)$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)