

東北大学 2019 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面における曲線 $y = \sin x$ の 2 つの接線が直交するとき、その交点の y 座標の値をすべて求めよ。

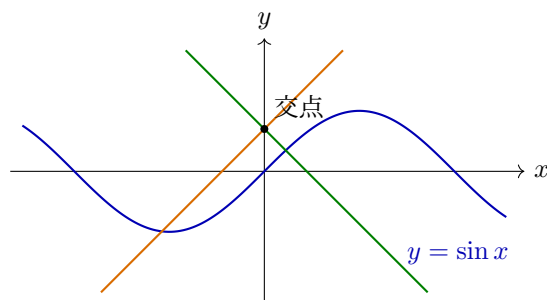
▶ 解法 1 (接線の傾きの値域を使う)

【方針】

曲線 $y = \sin x$ の $x = \alpha$ における接線の傾きは $\cos \alpha$ である。2 本の接線が直交するには傾きの積が -1 でなければならない。すなわち、接点の x 座標を α, β とすると $\cos \alpha \cos \beta = -1$ である。 $-1 \leq \cos x \leq 1$ であるから、この等式が成り立つには、一方が 1 、他方が -1 でなければならない。よって接点は $\alpha = 2k\pi$, $\beta = (2l+1)\pi$ と書ける。ただし k, l は整数である。 $x = 2k\pi$ における接線は $y = x - 2k\pi$ であり、 $x = (2l+1)\pi$ における接線は $y = -x + (2l+1)\pi$ である。交点では $x - 2k\pi = -x + (2l+1)\pi$ だから、その y 座標は $y = x - 2k\pi = \frac{(2l+1)\pi - 2k\pi}{2} = \frac{(2(l-k)+1)\pi}{2}$ である。

【解答】

逆に、任意の整数 m に対して $m = l - k$ となる整数 k, l を取れば、この値は実際に得られる。したがって求める値は $\frac{(2m+1)\pi}{2}$ ($m \in \mathbb{Z}$) である。



▶ 解法 2 (切片から交点を読む)

【方針】

直交するための傾きが $1, -1$ に限られることを確認した後、それぞれの接線族を切片の形で書く。2 直線の式を加えれば交点の y 座標が直接得られる。

【解答】

接点の x 座標を α, β とすると、接線の傾きはそれぞれ $\cos \alpha, \cos \beta$ である。直交条件は

$$\cos \alpha \cos \beta = -1.$$

両因子の絶対値は 1 以下だから、傾きは 1 と -1 に限られる。

傾き 1 の接線は $x = 2k\pi$ における

$$y = x - 2k\pi$$

であり、傾き -1 の接線は $x = (2l+1)\pi$ における

$$y = -x + (2l+1)\pi$$

である。2 式を加えると、交点の y 座標は

$$2y = (2l+1)\pi - 2k\pi.$$

したがって

$$y = \frac{(2(l-k)+1)\pi}{2}.$$

$l - k$ は任意の整数を動くので、求める値は

$$y = \frac{(2m+1)\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 14 分。直交条件から傾きの積が -1 になることと、 $\cos x$ の値域を組み合わせるのが核心である。積が -1 になるには 1 と -1 の組しかないため、接点は正弦曲線の極値点に限られる。交点の y 座標は整数 2 つの差で決まるので、最後に任意の奇数倍 $\pi/2$ が実現することを確認すると、必要十分な答えになる。

【第 2 問】

a を 1 ではない正の実数とし、 n を正の整数とする。次の不等式を考える。

$$\log_a(x - n) > \frac{1}{2} \log_a(2n - x)$$

- (1) $n = 6$ のとき、この不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。
- (2) この不等式を満たす整数 x が存在するための n についての必要十分条件を求めよ。

▶ 解法 1 (真数条件と整数変数で整理する)

【方針】

真数条件から $n < x < 2n$ を確認し、 $y = x - n$ とおく。底が 1 より大きい小さいかで不等号の向きが逆になるため、 $a > 1$ では $y^2 + y > n$ 、 $0 < a < 1$ では $y^2 + y < n$ を調べる。

【解答】

(1) 真数条件は

$$x - 6 > 0, \quad 12 - x > 0$$

であるから、 $6 < x < 12$ である。 $y = x - 6$ とおけば

$$y = 1, 2, 3, 4, 5, \quad 12 - x = 6 - y$$

となる。

$a > 1$ のとき、対数関数は増加するので

$$\log_a y > \frac{1}{2} \log_a(6 - y) \iff y^2 > 6 - y \iff y^2 + y > 6.$$

したがって $y = 3, 4, 5$ 、すなわち

$$x = 9, 10, 11$$

である。

一方 $0 < a < 1$ のとき、対数関数は減少するので

$$\log_a y > \frac{1}{2} \log_a(6 - y) \iff y^2 < 6 - y \iff y^2 + y < 6.$$

これを満たすのは $y = 1$ だけである。 $y = 2$ は等号になるため除く。よって

$$x = 7$$

である。

(2) 一般に真数条件から

$$y = x - n \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$$

である。

$a > 1$ のときは $y^2 + y > n$ を満たす整数 y が必要である。 $n = 1$ では候補がなく、 $n = 2$ では $y = 1$ に対して等号になる。 $n \geq 3$ なら $y = n - 1$ とすれば

$$y^2 + y = n(n - 1) > n$$

となる。

$0 < a < 1$ のときは $y^2 + y < n$ が必要である。 $n = 1, 2$ では不可能であり、 $n \geq 3$ なら $y = 1$ とすれば $2 < n$ となる。したがって、どちらの場合も必要十分条件は

$$n \geq 3$$

である。

▶ 解法 2 (二次式の端の符号を見る)

【方針】

区間 $n < x < 2n$ で $F(x) = (x - n)^2 - (2n - x)$ を考える。 F はこの区間で狭義単調増加するため、整数点で $F > 0$ または $F < 0$ が実現する条件は両端に最も近い整数だけで判定できる。

【解答】

(1) 真数条件は $6 < x < 12$ である。また

$$F(x) = (x - 6)^2 - (12 - x) = x^2 - 11x + 24 = (x - 3)(x - 8)$$

とおく。

$a > 1$ では $F(x) > 0$ が必要なので、真数条件と合わせて

$$8 < x < 12.$$

したがって $x = 9, 10, 11$ である。 $0 < a < 1$ では $F(x) < 0$ が必要なので

$$6 < x < 8,$$

したがって $x = 7$ である。

(2) 一般に

$$F(x) = (x - n)^2 - (2n - x)$$

とおくと、 $n < x < 2n$ では

$$F'(x) = 2(x - n) + 1 > 0$$

である。よって F は狭義単調増加する。

$a > 1$ では $F(x) > 0$ となる整数点が必要である。最大の候補 $x = 2n - 1$ において

$$F(2n - 1) = (n - 1)^2 - 1 = n(n - 2)$$

だから、存在条件は $n \geq 3$ である。

$0 < a < 1$ では $F(x) < 0$ となる整数点が必要である。最小の候補 $x = n + 1$ において

$$F(n + 1) = 1 - (n - 1) = 2 - n$$

だから、やはり存在条件は $n \geq 3$ である。

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。真数条件と、底が 1 より大きい小さいかによる不等号の反転が核心である。 $n = 6$, $0 < a < 1$ の場合、 $x = 8$ は $y^2 + y = 6$ という等号なので含まれない。(2) は候補整数の端を代入すれば必要十分性まで短く示せる。

【第 3 問】

a を実数とし、数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) $a > 0$ のとき、数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ。
- (2) $-1 < a < 0$ のとき、すべての正の整数 n に対して $-1 < x_n < 0$ が成り立つことを示せ。
- (3) $-1 < a < 0$ のとき、数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。

▶ 解法 1 (単調性と有界性を使う)

【方針】

差 $x_{n+1} - x_n = x_n^2$ に注目する。 $a > 0$ では正のまま増加し、しかも各差が少なくとも a^2 になるため、無限大へ発散する。 $-1 < a < 0$ では写像 $x \mapsto x(1+x)$ が区間 $(-1, 0)$ を保つことを帰納法で示す。その後、単調増加かつ上に有界であることから極限を持ち、漸化式に代入して極限を決める。

【解答】

(1) $a > 0$ とする。 $x_1 = a > 0$ であり、 $x_n > 0$ なら $x_{n+1} = x_n + x_n^2 > x_n > 0$ である。したがって帰納法により、すべての n で $x_n > 0$ かつ $x_n \geq a$ である。

さらに $x_{n+1} - x_n = x_n^2 \geq a^2$ だから、 $x_n \geq a + (n-1)a^2$ である。右辺は $n \rightarrow \infty$ で無限大へ発散するので、 $x_n \rightarrow \infty$ である。したがって数列 $\{x_n\}$ は発散する。

(2) $-1 < a < 0$ とする。 $x_1 = a$ なので $-1 < x_1 < 0$ である。いま $-1 < x_n < 0$ と仮定すると $0 < 1 + x_n < 1$ であり、 $x_{n+1} = x_n(1 + x_n)$ である。ここで $x_n < 0$ 、 $1 + x_n > 0$ だから $x_{n+1} < 0$ である。また $|x_{n+1}| = |x_n|(1 + x_n) < |x_n| < 1$ なので $x_{n+1} > -1$ である。したがって $-1 < x_{n+1} < 0$ である。数学的帰納法により、すべての正の整数 n について $-1 < x_n < 0$ が成り立つ。

(3) (2) より $x_n < 0$ であり、また $x_{n+1} - x_n = x_n^2 > 0$ なので、数列 $\{x_n\}$ は単調増加である。さらに $x_n < 0$ だから上に有界である。よって極限 L が存在する。

漸化式の両辺で極限を取ると $L = L + L^2$ である。したがって $L^2 = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ である。

▶ 解法 2 (逆数で極限を直接押さえる)

【方針】

(1)(2) を帰納法で確認した後、 $-1 < a < 0$ では $y_n = -1/x_n$ とおく。 y_n の増加量が 1 より大きいことを示し、 $y_n \rightarrow \infty$ から $x_n \rightarrow 0$ を得る。

【解答】

(1) $a > 0$ なら $x_{n+1} - x_n = x_n^2 > 0$ なので $x_n \geq a$ である。したがって

$$x_n - a = \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 \geq (n-1)a^2,$$

よって $x_n \rightarrow \infty$ である。

(2) $-1 < x_n < 0$ と仮定すると

$$x_{n+1} = x_n(1 + x_n) < 0$$

であり、また $0 < 1 + x_n < 1$ だから

$$|x_{n+1}| = |x_n|(1 + x_n) < |x_n| < 1.$$

初期値 $-1 < a < 0$ と合わせ、帰納法により $-1 < x_n < 0$ が続く。

(3) (2) より

$$y_n = -\frac{1}{x_n} > 1$$

とおける。漸化式から

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -\frac{1}{x_n(1+x_n)} = \frac{y_n^2}{y_n - 1} \\ &= y_n + 1 + \frac{1}{y_n - 1} > y_n + 1. \end{aligned}$$

したがって $y_n > y_1 + n - 1$ であり、 $y_n \rightarrow \infty$ である。ゆえに

$$x_n = -\frac{1}{y_n} \rightarrow 0.$$

【総評】 難度 5、目安時間 16 分。 $x_{n+1} = x_n(1 + x_n)$ と $x_{n+1} - x_n = x_n^2$ の 2 つの見方を使い分ける問題である。正の場合は差が少なくとも一定量 a^2 あるため発散まで示せる。負の場合は区間 $(-1, 0)$ が保たれることを丁寧に示し、そのうえで単調増加・上に有界から極限を持つと結論する。極限候補は 0 だけだが、先に収束の根拠を書くことが大切である。

【第 4 問】

実数を係数にもつ整式 $A(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りとして得られる整式を $[A(x)]$ と表す。

- (1) $[2x^2 + x + 3]$, $[x^5 - 1]$, $[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]]$ をそれぞれ求めよ。
 (2) 整式 $A(x)$, $B(x)$ に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

- (3) 実数 θ に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$[(x \sin \theta + \cos \theta)^2] = x \sin 2\theta + \cos 2\theta$$

- (4) 次の等式を満たす実数 a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。

$$[(ax + b)^4] = -1$$

▶ 解法 1 (三角関数の倍角へつなぐ)

【方針】

$x^2 \equiv -1$ と考え、余りを一次式に直す。(2) は余りの定義から、元の整式との差が $x^2 + 1$ の倍数であることを使って積でも余りが一致することを示す。(3) は直接展開して $x^2 \equiv -1$ を使う。(4) は a, b を $r \sin \theta, r \cos \theta$ と表す三角関数解法に加え、 $2abx + b^2 - a^2$ を使う代数的な別解も示す。

【解答】

(1) $x^2 + 1$ で割った余りを考えるので、余りの計算では $x^2 \equiv -1$ としてよい。したがって $[2x^2 + x + 3] = [-2 + x + 3] = x + 1$ である。また $x^4 \equiv 1$ より $x^5 \equiv x$ なので $[x^5 - 1] = x - 1$ である。さらに $[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]] = [(x + 1)(x - 1)] = [x^2 - 1] = -2$ である。

(2) 整式 $A(x)$ を $x^2 + 1$ で割ると $A(x) = [A(x)] + (x^2 + 1)Q(x)$ と書ける。同様に $B(x) = [B(x)] + (x^2 + 1)R(x)$ と書ける。これらを掛けると、 $A(x)B(x)$ と $[A(x)][B(x)]$ の差は $x^2 + 1$ の倍数である。したがって、この 2 つを $x^2 + 1$ で割った余りは等しい。よって $[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$ である。

(3) 左辺を展開して余りを取ると

$$\begin{aligned} [(x \sin \theta + \cos \theta)^2] &= [x^2 \sin^2 \theta + 2x \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta] \\ &= -\sin^2 \theta + x \sin 2\theta + \cos^2 \theta \\ &= x \sin 2\theta + \cos 2\theta \end{aligned}$$

である。したがって示す等式が成り立つ。

(4) まず $(a, b) = (0, 0)$ は左辺が 0 になるので不適である。そこで $a = r \sin \theta$, $b = r \cos \theta$, $r > 0$ とおく。このとき $ax + b = r(x \sin \theta + \cos \theta)$ である。(3) と (2) を用いると $[(ax + b)^4] = r^4[x \sin 4\theta + \cos 4\theta]$ である。これが -1 に等しいためには $r^4 \sin 4\theta = 0$, $r^4 \cos 4\theta = -1$ でなければならない。よって $r = 1$ かつ $\sin 4\theta = 0$, $\cos 4\theta = -1$ である。したがって $4\theta = (2m + 1)\pi$ となり、 $\sin \theta, \cos \theta$ は $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ の 4 通りを取る。よって

$$(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

である。

▶ 解法 2 (一次式の係数を代数的に追う)

【方針】

$x^2 \equiv -1$ として (1) を計算し、(2) は余りの定義から証明する。(3) は直接展開する。(4) では $[(ax+b)^2]$ を $ux+v$ と置き、その平方の一次係数と定数項を比較する。

【解答】

(1) $x^2 \equiv -1$ より

$$[2x^2 + x + 3] = x + 1, \quad [x^5 - 1] = x - 1.$$

したがって

$$[[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]] = [x^2 - 1] = -2.$$

(2)

$$A = [A] + (x^2 + 1)Q, \quad B = [B] + (x^2 + 1)R$$

と書ける。積を取れば $AB - [A][B]$ は $x^2 + 1$ の倍数だから

$$[AB] = [[A][B]].$$

(3) 直接展開して $x^2 \equiv -1$ を用いると

$$\begin{aligned} [(x \sin \theta + \cos \theta)^2] &= -\sin^2 \theta + 2x \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= x \sin 2\theta + \cos 2\theta. \end{aligned}$$

(4) まず

$$[(ax+b)^2] = 2abx + b^2 - a^2.$$

$u = 2ab$, $v = b^2 - a^2$ とおけば

$$[(ax+b)^4] = [(ux+v)^2] = 2uvx + v^2 - u^2.$$

これが -1 に等しい条件は

$$uv = 0, \quad v^2 - u^2 = -1.$$

$u = 0$ なら $v^2 = -1$ となり不可能である。よって $v = 0$ 、すなわち $b^2 = a^2$ である。さらに

$$-u^2 = -1, \quad u = 2ab$$

より $4a^4 = 1$ であり、 $a^2 = b^2 = 1/2$ を得る。したがって

$$(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

【総評】 難度 6、目安時間 24 分。余り記号は、実質的に $x^2 = -1$ として計算する仕組みである。(2) で余りの積が保たれることを示しておく、(3)(4) で同じ操作を繰り返し使える。三角関数解法では a, b を半径と角で表す発想が自然だが、別解のように直接 $[(ax+b)^2]$ を置いても解ける。最終的に 4 通りすべてを列挙し、 $(0, 0)$ を除外することが重要である。

【第 5 問】

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2}$$

(2) 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^1 (e^x - e^t + 1)f(t) dt$$

▶ 解法 1 (2 つの積分値を未知数にする)

【方針】

(1) は x と $-x$ を組にする対称性を使う。(2) では

$$A = \int_{-1}^1 f(t) dt, \quad B = \int_{-1}^1 e^t f(t) dt$$

と置き、(1) と同じ対称性から A, B の連立一次方程式を作る。

【解答】

(1)

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx$$

とおく。 x を $-x$ に置き換えると

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^{-x}} dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x \sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx.$$

2 つの式を加えると

$$2I = \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) dx.$$

さらに

$$\int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) dx = 2 \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = 1$$

である。したがって

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx = \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = \frac{1}{2}.$$

(2)

$$A = \int_{-1}^1 f(t) dt, \quad B = \int_{-1}^1 e^t f(t) dt$$

とおく。与式の積分部分は

$$\int_{-1}^1 (e^x - e^t + 1)f(t) dt = Ae^x - B + A$$

だから

$$f(x) = A + \frac{\sin^2(\pi x) - B}{1+e^x}.$$

ここで対称性と (1) から

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+e^x} &= 1, & \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx &= \frac{1}{2}, \\ \int_{-1}^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx &= 1, & \int_{-1}^1 \frac{e^x \sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

f の式を積分し、次に $e^x f$ を積分すると

$$B = A + \frac{1}{2}, \quad 2B = A(e - e^{-1}) + \frac{1}{2}.$$

$D = e^2 - 2e - 1$ とおけば

$$A = \frac{e}{2D}, \quad B = \frac{e^2 - e - 1}{2D}.$$

よって

$$f(x) = \frac{e}{2D} + \frac{\sin^2(\pi x) - \frac{e^2 - e - 1}{2D}}{1 + e^x}, \quad D = e^2 - 2e - 1.$$

▶ 解法 2 (対称性を積分作用素としてまとめる)

【方針】

$K(x) = 1/(1 + e^x)$ とおき、 $K(x) + K(-x) = 1$ を使う。未知関数の 2 つのモーメント

$$A = \int_{-1}^1 f(t) dt, \quad B = \int_{-1}^1 e^t f(t) dt$$

に対する連立方程式を表にまとめて解く。

【解答】

(1)

$$K(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

とおくと

$$K(x) + K(-x) = 1.$$

$\sin^2(\pi x)$ は偶関数なので

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) K(x) dx &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) dx \\ &= 2 \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = 1. \end{aligned}$$

よって問題の等式を得る。

(2)

$$A = \int_{-1}^1 f(t) dt, \quad B = \int_{-1}^1 e^t f(t) dt$$

とおく。与式を $f(x)$ について解けば

$$f(x) = A + K(x)\{\sin^2(\pi x) - B\}.$$

対称性から必要な積分値は

	$K(x)$	$e^x K(x)$
$\int_{-1}^1 (\cdot) dx$	1	1
$\int_{-1}^1 \sin^2(\pi x)(\cdot) dx$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

である。また

$$\int_{-1}^1 e^x dx = e - e^{-1}.$$

したがって f の式をそのまま積分した式と、 $e^x f$ を積分した式は

$$A = 2A + \frac{1}{2} - B, \quad B = (e - e^{-1})A + \frac{1}{2} - B.$$

すなわち

$$B = A + \frac{1}{2}, \quad 2B = (e - e^{-1})A + \frac{1}{2}.$$

$D = e^2 - 2e - 1$ とおくと

$$A = \frac{e}{2D}, \quad B = \frac{e^2 - e - 1}{2D}.$$

ゆえに

$$f(x) = \frac{e}{2D} + \frac{\sin^2(\pi x) - \frac{e^2 - e - 1}{2D}}{1 + e^x}, \quad D = e^2 - 2e - 1.$$

【総評】 難度 7、目安時間 28 分。対称性を使う積分と、未知の積分値を文字で置く処理を組み合わせる問題である。(1) の置換 $x \mapsto -x$ は (2) でも繰り返し使うので、 $\frac{1}{1+e^x}$ と $\frac{e^x}{1+e^x}$ が対になることを意識したい。 A, B の連立方程式を作る際、積分区間の長さ 2 による $2A$ を落としやすい。最後の式は代入で検算できる形にしておく安全である。

【第 6 問】

10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し、新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに、袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとす。この試行を m 回繰り返したとき、取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m, k)$ とする。2 以上の整数 n に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) $p(n+1, 2)$ を $p(n, 2)$ と $p(n, 1)$ を用いて表せ。
- (2) $p(n, 1)$ を求めよ。
- (3) $p(n, 2)$ を求めよ。

▶ 解法 1 (確率漸化式を解く)

【方針】

赤玉を何個取り出したかで袋の中の赤玉数が決まる。すでに k 個の赤玉を取り出していれば、残る赤玉は $5-k$ 個である。(1) は、 n 回後に赤玉 2 個で次に白を引く場合と、赤玉 1 個で次に赤を引く場合を足す。(2) は赤玉が初めて 1 回だけ出る時刻を固定して和を取る。(3) は (1) の一次漸化式に (2) の式を代入して解く。

【解答】

(1) $n+1$ 回の試行後に、取り出した赤玉が全部で 2 個となる場合を考える。 n 回後までにすでに赤玉を 2 個取り出している場合、袋には赤玉が 3 個、白玉が 7 個ある。この状態で次に白玉を取り出せば、赤玉を取り出した総数は 2 個のままである。その確率は $\frac{7}{10}$ である。 n 回後までに赤玉を 1 個取り出している場合、袋には赤玉が 4 個、白玉が 6 個ある。この状態で次に赤玉を取り出せば、総数が 2 個になる。その確率は $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ である。したがって $p(n+1, 2) = \frac{7}{10}p(n, 2) + \frac{2}{5}p(n, 1)$ である。

(2) 赤玉をちょうど 1 回取り出す時刻を j とする。 j 回目より前はすべて白玉を取り出す必要がある。赤玉をまだ取り出していない間は、赤玉 5 個、白玉 5 個なので、白玉を取り出す確率は $\frac{1}{2}$ である。 j 回目に赤玉を取り出す確率も $\frac{1}{2}$ である。その後は赤玉を 1 個取り出した状態なので、袋には赤玉 4 個、白玉 6 個があり、白玉を取り出す確率は $\frac{3}{5}$ である。よって $p(n, 1) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{3}{5}\right)^{n-j}$ である。これは等比数列の和で、

$$\begin{aligned} p(n, 1) &= \left(\frac{3}{5}\right)^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{5}{6}\right)^j \\ &= 5 \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。したがって

$$p(n, 1) = 5 \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

である。

(3) (1) より $p(n+1, 2) - \frac{7}{10}p(n, 2) = \frac{2}{5}p(n, 1)$ である。 $q_n = \left(\frac{10}{7}\right)^n p(n, 2)$ とおくと $q_{n+1} - q_n = \left(\frac{10}{7}\right)^{n+1} \frac{2}{5}p(n, 1)$ である。(2) を代入し、 $p(1, 2) = 0$ から和を取ると

$$p(n, 2) = 10 \left\{ \left(\frac{7}{10}\right)^n - 2 \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

を得る。したがって

$$p(n, 2) = 10 \left\{ \left(\frac{7}{10}\right)^n - 2 \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$$

である。分母を 10^n にそろえると、同値に $p(n, 2) = 10^{1-n}(7^n - 2 \cdot 6^n + 5^n)$ である。

▶ 解法 2 (赤玉を引く時刻を固定する)

【方針】

赤玉を 1 個だけ引く場合はその時刻を、2 個引く場合は 2 つの時刻を固定する。各区間で白玉を引く確率が $1/2$, $3/5$, $7/10$ と変わることの掛け、等比和を取る。

【解答】

(1) n 回までに赤玉を 2 個引き、次に白玉を引く場合と、赤玉を 1 個引き、次に赤玉を引く場合に分ける。したがって

$$p(n+1, 2) = \frac{7}{10}p(n, 2) + \frac{2}{5}p(n, 1).$$

(2) 赤玉を引く唯一の時刻を j とする。赤玉を引く前の白玉確率と j 回目の赤玉確率はともに $1/2$ 、その後の白玉確率は $3/5$ である。よって

$$\begin{aligned} p(n, 1) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{3}{5}\right)^{n-j} \\ &= 5 \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}. \end{aligned}$$

(3) 赤玉を引く時刻を $1 \leq i < j \leq n$ とする。その出方の確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{3}{5}\right)^{j-i-1} \frac{2}{5} \left(\frac{7}{10}\right)^{n-j}.$$

したがって

$$p(n, 2) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{3}{5}\right)^{j-i-1} \frac{2}{5} \left(\frac{7}{10}\right)^{n-j}.$$

まず i について、次に j について等比和を計算すると

$$p(n, 2) = 10 \left\{ \left(\frac{7}{10}\right)^n - 2 \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}.$$

すなわち

$$p(n, 2) = 10^{1-n}(7^n - 2 \cdot 6^n + 5^n).$$

【総評】 難度 6、目安時間 24 分。袋の中の赤玉数は、これまでに取り出した赤玉の個数だけで決まるため、状態分類が有効である。(2) では赤玉が 1 回だけ出る時刻を固定すると、前後の白玉確率が $\frac{1}{2}$ と $\frac{3}{5}$ に分かれる。(3) は一次漸化式として解くのが標準だが、最終式の第 1 項が $(\frac{7}{10})^n$ 、第 2 項が $(\frac{3}{5})^n$ 、第 3 項が $(\frac{1}{2})^n$ になる理由を、(1)(2) の状態遷移と対応させて確認したい。