

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2021 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

整数 m が与えられたとき，整数 k, l についての方程式

$$(*) \quad 48k + 18l = m$$

を考える。

(1) 次の空欄に入るべき m に関する条件を答えのみ記せ。

与えられた整数 m に対し， $(*)$ が整数解 (k, l) をもつための必要十分条件は（空欄）である。

(2) 上の (1) で記した空欄の条件が必要十分条件であることを示せ。

(3) $m = 540$ のとき，方程式 $(*)$ を満たす正の整数 k, l の組 (k, l) をすべて求めよ。

第 2 問

座標空間内の点 $A(x, y, z)$ は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点とする。点 $B(1, 1, 1)$ が直線 OA 上にないとき、点 B から直線 OA に下ろした垂線を BP とし、三角形 OBP を OP を軸として一回転させてできる立体の体積を V とする。

- (1) V を x, y, z を用いて表せ。
- (2) V の最大値と、そのときに x, y, z の満たす関係式を求めよ。

第 3 問

実数 θ, a は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, a > 0$ を満たすとし、2つの円 C_1, C_2 の方程式を以下で定める。

$$C_1 : (x - \tan \theta)^2 + (y - \tan \theta)^2 = 9$$

$$C_2 : (x - a \cos \theta + 1)^2 + (y - a \sin \theta - 1)^2 = 1$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $t = \frac{1}{\cos \theta}$ とおく。 C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を L とする。 L^2 を t と a を用いて表せ。
- (2) ある実数 a に対して、2つの円 C_1, C_2 がただ1つの共有点をもつような θ がちょうど5個存在するとする。このとき a の値を求めよ。

第 4 問

b は実数とする。 $f(x) = -x^2 + b$ に対し曲線 $y = f(x)$ を C とおく。

- (1) 曲線 C と円 $x^2 + y^2 = 1$ が異なる 4 個の交点をもつような b の値の範囲を求めよ。
- (2) b が (1) で求めた値の範囲にあるとき、曲線 C と円 $x^2 + y^2 = 1$ の 4 個の交点の x 座標を $\pm\alpha, \pm\beta$ ($0 < \beta < \alpha$) とする。曲線 C と直線 $y = f(\alpha)$, $y = f(\beta)$ で囲まれた領域を y 軸のまわりに一回転させてできる立体の体積を b を用いて表せ。

第 5 問

以下の問いに答えよ。必要ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

を用いてよい。

(1) 2 以上の整数 n に対して不等式

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n$$

を示せ。

(2) 正の整数 n に対し

$$a_n = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$$

により数列 $\{a_n\}$ を定める。このとき、等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{2}$$

を示せ。

(3) さらに正の整数 n に対し

$$b_n = \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n}{n^2}$$

により数列 $\{b_n\}$ を定めるとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

第 6 問

座標空間において、3点 $A(6, 6, 3)$ 、 $B(4, 0, 6)$ 、 $C(0, 6, 6)$ を通る平面を α とする。以下の問いに答えよ。

- (1) α に垂直で大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。
- (2) 中心が点 $P(a, b, c)$ で半径が r の球が平面 α 、 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面のすべてに接し、かつ $a \geq 0$ 、 $b \geq 0$ が満たされている。このような点 P と r の組をすべて求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)