

東北大学 2021 年度 理系（後期）

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

整数 m が与えられたとき、整数 k, l についての方程式

$$(*) \quad 48k + 18l = m$$

を考える。

(1) 次の空欄に入るべき m に関する条件を答えのみ記せ。

与えられた整数 m に対し、 $(*)$ が整数解 (k, l) をもつための必要十分条件は（空欄）である。

(2) 上の (1) で記した空欄の条件が必要十分条件であることを示せ。

(3) $m = 540$ のとき、方程式 $(*)$ を満たす正の整数 k, l の組 (k, l) をすべて求めよ。

▶ 解法 1（最大公約数と合同式を使う方法）

【方針】

一次不定方程式 $48k + 18l = m$ の可解条件は、係数の最大公約数 $\gcd(48, 18) = 6$ が右辺 m を割り切ることとして考える。

(2) では必要性は左辺が常に 6 の倍数であることから、十分性は $m = 6s$ として $8k + 3l = s$ の具体的な整数解を 1 組作ることで示す。(3) は $8k + 3l = 90$ に直し、合同式から k が 3 の倍数であることを使って正整数解を列挙する。

【解答】

(1)

必要十分条件は m が 6 で割り切れることである。

(2)

まず、任意の整数 k, l に対して $48k + 18l = 6(8k + 3l)$ である。したがって方程式 $48k + 18l = m$ が整数解をもつなら、 m は 6 で割り切れなければならない。

逆に、 m が 6 で割り切れるとする。 $m = 6s$ とおくと、方程式は $48k + 18l = 6s$ すなわち $8k + 3l = s$ と同値である。ここで $k = -s$, $l = 3s$ とおけば $8k + 3l = -8s + 9s = s$ となる。したがって整数解が存在する。以上より、条件は必要十分である。

(3) $m = 540$ のとき、方程式は $48k + 18l = 540$ であり、両辺を 6 で割って $8k + 3l = 90$ となる。これを 3 で割った余りで見ると $8k \equiv 0 \pmod{3}$ であり、 $8 \equiv 2 \pmod{3}$ は 3 と互いに素なので $k \equiv 0 \pmod{3}$ である。

そこで $k = 3j$ とおくと $24j + 3l = 90$ より $l = 30 - 8j$ である。 k, l が正の整数であるためには $j \geq 1$, $30 - 8j \geq 1$ が必要である。したがって $j = 1, 2, 3$ である。よって求める組は $(k, l) = (3, 22), (6, 14), (9, 6)$ である。

▶ 解法 2 (互除法で一般解を直接作る方法)

【方針】

互除法から 6 を 48 と 18 の整数係数で表して可解条件を示す。 $m = 540$ では 1 つの解から一般解を作り、正整数条件でパラメータを絞る。

【解答】

(1) 必要十分条件は

$$m \text{ が } 6 \text{ の倍数であること}$$

である。

(2) 左辺 $48k + 18l$ は常に 6 の倍数だから必要性は明らかである。逆に互除法より

$$6 = 18 - (48 - 2 \cdot 18) = 3 \cdot 18 - 48$$

である。 $m = 6s$ なら

$$m = 48(-s) + 18(3s)$$

と表せるので、 $(k, l) = (-s, 3s)$ が整数解になる。よって条件は十分でもある。

(3) $8k + 3l = 90$ の 1 つの整数解は $(k, l) = (0, 30)$ である。2 解の差を取ると $8\Delta k + 3\Delta l = 0$ だから、一般解は

$$k = 3t, \quad l = 30 - 8t \quad (t \text{ は整数})$$

である。正整数条件 $3t > 0$, $30 - 8t > 0$ から $t = 1, 2, 3$ となる。したがって

$$(k, l) = (3, 22), (6, 14), (9, 6).$$

【総評】 難度 4、計算量 3。想定時間は 10 分程度。一次不定方程式の基本問題であり、係数の最大公約数が右辺を割ることが可解条件になる。(2) では十分性を抽象的に述べるだけでなく、実際に $k = -s, l = 3s$ という整数解を作ると明確である。(3) は正整数条件があるため、合同式で k を 3 の倍数に絞ってから有限個を調べる。最大公約数の定理だけに頼らず、互除法で整数解を実際に構成し、一般解から正整数解の取りこぼしがないことも確認した。

【第 2 問】

座標空間内の点 $A(x, y, z)$ は原点 O を中心とする半径 1 の球面上の点とする。点 $B(1, 1, 1)$ が直線 OA 上になるとき、点 B から直線 OA に下ろした垂線を BP とし、三角形 OBP を OP を軸として一回転させてできる立体の体積を V とする。

(1) V を x, y, z を用いて表せ。

(2) V の最大値と、そのときに x, y, z の満たす関係式を求めよ。

▶ 解法 1 (内積による射影で円錐を表す方法)

【方針】

$A = (x, y, z)$ は単位ベクトルであり、直線 OA への点 $B(1, 1, 1)$ の射影を考える。符号つき射影の長さは $s = x + y + z$ で、垂線の長さは $BP^2 = 3 - s^2$ となる。三角形 OBP を OP のまわりに回転すると、高さ $|s|$ 、底面半径 BP の円錐になる。最大化は $u = |s|$ とおき、 $0 \leq u \leq \sqrt{3}$ で $u(3 - u^2)$ を調べる。

【解答】

(1) $A(x, y, z)$ は原点中心、半径 1 の球面上にあるので $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ である。したがって $\vec{OA} = (x, y, z)$ は単位ベクトルである。また $\vec{OB} = (1, 1, 1)$ である。

点 B の直線 OA への符号つき射影の長さを s とすると $s = \vec{OB} \cdot \vec{OA} = x + y + z$ である。よって $OP = |s| = |x + y + z|$ である。一方、 $|\vec{OB}|^2 = 3$ なので、直角三角形 OBP において $BP^2 = OB^2 - OP^2 = 3 - (x + y + z)^2$ である。

三角形 OBP を OP を軸として一回転させると、高さ $|OP| = |x + y + z|$ 、底面半径 BP の円錐ができる。したがって $V = \frac{\pi}{3} BP^2 \cdot OP = \frac{\pi}{3} \{3 - (x + y + z)^2\} |x + y + z|$ である。

(2) $u = |x + y + z|$ とおく。 (x, y, z) は単位ベクトルであるから、内積の大きさの評価より $0 \leq u \leq \sqrt{3}$ である。体積は $V = \frac{\pi}{3} (3 - u^2)u$ である。

関数 $F(u) = (3 - u^2)u = 3u - u^3$ を $0 \leq u \leq \sqrt{3}$ で考えると $F'(u) = 3 - 3u^2 = 3(1 - u)(1 + u)$ である。したがって $F(u)$ は $0 < u < 1$ で増加し、 $1 < u < \sqrt{3}$ で減少する。よって最大は $u = 1$ のときで、 $F(1) = 2$ である。したがって $V_{\max} = \frac{2\pi}{3}$ である。

そのときの条件は $|x + y + z| = 1$ である。すなわち、もとの球面条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ のもとで $(x + y + z)^2 = 1$ を満たす点で最大となる。

▶ 解法 2 (直角三角形の角で円錐を表す方法)

【方針】

$\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ のなす角を ϕ と置く。円錐の高さと底面半径を三角比で表し、 $|\cos \phi|$ の 1 変数にして最大化する。

【解答】

(1) $OA = 1$, $OB = \sqrt{3}$ であり、 $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ のなす角を ϕ とする。直角三角形 OBP から

$$OP = \sqrt{3}|\cos \phi|, \quad BP^2 = 3 \sin^2 \phi$$

である。また $\cos \phi = (x + y + z)/\sqrt{3}$ だから

$$V = \frac{\pi}{3}BP^2 \cdot OP = \frac{\pi}{3}\{3 - (x + y + z)^2\}|x + y + z|.$$

(2) $w = |\cos \phi|$ ($0 \leq w \leq 1$) とおくと

$$V = \pi\sqrt{3}(1 - w^2)w.$$

微分すると

$$\frac{dV}{dw} = \pi\sqrt{3}(1 - 3w^2)$$

なので、最大は $w = 1/\sqrt{3}$ のときである。よって

$$V_{\max} = \frac{2\pi}{3}.$$

また $|x + y + z| = \sqrt{3}w = 1$ だから、最大となる条件は

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (x + y + z)^2 = 1$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 4。想定時間は 16 分程度。空間ベクトルの射影と円錐体積を結びつける問題である。射影の長さには符号があるが、円錐の高さは $|x + y + z|$ になる点を明示する必要がある。最大化は 1 変数 $u = |x + y + z|$ に落ち、 $u = 1$ が最大条件になる。条件式は球面上で $(x + y + z)^2 = 1$ と表すと図形的にも分かりやすい。射影の内積表示と三角比表示の両方で同じ 1 変数関数へ帰着し、最大条件まで一致することを確かめた。

【第 3 問】

実数 θ, a は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, a > 0$ を満たすとし、2 つの円 C_1, C_2 の方程式を以下で定める。

$$C_1 : (x - \tan \theta)^2 + (y - \tan \theta)^2 = 9$$

$$C_2 : (x - a \cos \theta + 1)^2 + (y - a \sin \theta - 1)^2 = 1$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $t = \frac{1}{\cos \theta}$ とおく。 C_1 の中心と C_2 の中心の間の距離を L とする。 L^2 を t と a を用いて表せ。
- (2) ある実数 a に対して、2 つの円 C_1, C_2 がただ 1 つの共有点をもつような θ がちょうど 5 個存在するとする。このとき a の値を求めよ。

▶ 解法 1 (接触条件を 2 次方程式の解の個数に直す方法)

【方針】

2 円の中心を読み取り、中心間距離 L を $t = 1/\cos \theta$ で整理する。半径は 3 と 1 なので、ただ 1 つの共有点をもつ条件は外接 $L = 4$ または内接 $L = 2$ である。 $L^2 = 2t^2 - 2at + a^2$ に対して $t \geq 1$ の解を数える。 $t = 1$ は $\theta = 0$ の 1 個、 $t > 1$ は $\pm \theta$ の 2 個に対応するため、ちょうど 5 個にするには $t = 1$ がどちらかの接触条件に現れる必要がある。

【解答】

(1) C_1 の中心は $(\tan \theta, \tan \theta)$ であり、 C_2 の中心は $(a \cos \theta - 1, a \sin \theta + 1)$ である。したがって中心間距離 L の 2 乗は $L^2 = (\tan \theta - a \cos \theta + 1)^2 + (\tan \theta - a \sin \theta - 1)^2$ である。

ここで $t = \frac{1}{\cos \theta}$ とおく。 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta > 0$ なので $t \geq 1$ である。上の式を整理すると

$$\begin{aligned} L^2 &= a^2 + 2(\tan^2 \theta + 1) - 2a\{\cos \theta(\tan \theta + 1) + \sin \theta(\tan \theta - 1)\} \\ &= a^2 + 2\sec^2 \theta - 2a \cdot \frac{1}{\cos \theta} \\ &= a^2 - 2at + 2t^2 \end{aligned}$$

である。

(2)

2 つの円の半径は 3 と 1 である。したがって、2 つの円がただ 1 つの共有点をもつ条件は、外接または内接すること、すなわち $L = 4$ または $L = 2$ である。

(1) より、 $L^2 = c$ とおくと、 t は $2t^2 - 2at + a^2 - c = 0$ を満たす。ただし $c = 16$ または $c = 4$ である。また $t = 1$ は $\theta = 0$ の 1 個に対応し、 $t > 1$ は θ と $-\theta$ の 2 個に対応する。

共有点をただ 1 つもつ θ がちょうど 5 個存在するには、対応個数が奇数になる必要がある。したがって、どちらかの接触条件で $t = 1$ が解にならないといけない。

まず $L = 4$ の条件で $t = 1$ が解になるとすると $a^2 - 2a + 2 = 16$ であるから $a = 1 + \sqrt{15}$ である。このとき $L = 4$ の方程式は $t = 1$ と $t = \sqrt{15}$ を解にもつ。一方、 $L = 2$ の方程式は $t \geq 1$ の解をもたない。よって対応する θ は $1 + 2 = 3$ 個であり、条件を満たさない。

次に $L = 2$ の条件で $t = 1$ が解になるとすると $a^2 - 2a + 2 = 4$ であるから $a = 1 + \sqrt{3}$ である。このとき $L = 2$ の方程式は $t = 1$, $t = \sqrt{3}$ を解にもつ。また $L = 4$ の方程式は、 $t \geq 1$ の解を 1 つだけもつ。したがって対応する θ の個数は $1 + 2 + 2 = 5$ である。

以上より $a = 1 + \sqrt{3}$ である。

▶ 解法 2 (放物線と 2 本の水平線の交点を数える方法)

【方針】

(1) で中心間距離を得た後、 $y = 2t^2 - 2at + a^2$ のグラフと $y = 4, 16$ の交点を $t \geq 1$ で数える。 $t = 1$ だけが 1 個の θ に、 $t > 1$ は 2 個の θ に対応することを利用する。

【解答】

(1) 2 中心の座標差を 2 乗して整理すると

$$\begin{aligned} L^2 &= (\tan \theta - a \cos \theta + 1)^2 + (\tan \theta - a \sin \theta - 1)^2 \\ &= a^2 + 2(\tan^2 \theta + 1) - \frac{2a}{\cos \theta} \\ &= 2t^2 - 2at + a^2. \end{aligned}$$

(2) $t = 1/\cos \theta \geq 1$ である。 $t = 1$ は $\theta = 0$ の 1 個、 $t > 1$ は $\pm \theta$ の 2 個に対応する。したがって全体が奇数の 5 個になるには、放物線

$$y = 2t^2 - 2at + a^2$$

と $y = 4$ または $y = 16$ の交点に $t = 1$ が含まれなければならない。

$y = 16$ が $t = 1$ を通るとき

$$a^2 - 2a + 2 = 16$$

より $a = 1 + \sqrt{15}$ である。この場合、 $y = 16$ との交点は $t = 1, \sqrt{15}$ だが、 $y = 4$ とは $t \geq 1$ で交わらず、 θ は 3 個にしかない。

$y = 4$ が $t = 1$ を通るとき

$$a^2 - 2a + 2 = 4$$

より $a = 1 + \sqrt{3}$ である。この場合、 $y = 4$ との交点は $t = 1, \sqrt{3}$ であり、 $y = 16$ とは $t > 1$ で 1 回交わる。したがって対応数は $1 + 2 + 2 = 5$ である。よって

$$a = 1 + \sqrt{3}.$$

【総評】 難度 8、計算量 7。想定時間は 28 分程度。円の接触条件を、 $t = 1/\cos \theta$ の 2 次方程式の解の個数に変換する問題である。半径が 3 と 1 なので接触は $L = 4$ または $L = 2$ であり、さらに $t = 1$ と $t > 1$ で対応する θ の個数が違う点が核心である。ちょうど 5 個という奇数条件から $t = 1$ を含む場合に絞ると、候補 $1 + \sqrt{15}$ と $1 + \sqrt{3}$ を比較できる。2 次方程式の代数的な解の個数と、放物線・水平線の交点図式の双方で候補を確認した。 $t = 1$ と $t > 1$ で θ への対応数が異なる点が採点上の核心である。

【第 4 問】

b は実数とする。 $f(x) = -x^2 + b$ に対し曲線 $y = f(x)$ を C とおく。

- (1) 曲線 C と円 $x^2 + y^2 = 1$ が異なる 4 個の交点をもつような b の値の範囲を求めよ。
- (2) b が (1) で求めた値の範囲にあるとき、曲線 C と円 $x^2 + y^2 = 1$ の 4 個の交点の x 座標を $\pm\alpha, \pm\beta$ ($0 < \beta < \alpha$) とする。曲線 C と直線 $y = f(\alpha), y = f(\beta)$ で囲まれた領域を y 軸のまわりに一回転させてできる立体の体積を b を用いて表せ。

▶ 解法 1 (水平断面の円板で体積を求める方法)

【方針】

交点では $y = -x^2 + b$ を円の方程式に代入し、 $u = x^2$ において 2 次方程式に直す。異なる 4 交点をもつには、この 2 次方程式が異なる 2 つの正の解をもてばよいので、解の和、積、判別式を調べる。体積は y 軸まわりの回転体として水平断面で考え、高さ y における半径が $\sqrt{b-y}$ であることを用いる。 α^2, β^2 は交点方程式の 2 解なので、和と差で最終式を整理する。

【解答】

(1)

交点では $y = -x^2 + b$ かつ $x^2 + y^2 = 1$ である。 $u = x^2$ とおくと $y = b - u$ なので $u + (b - u)^2 = 1$ である。整理して $u^2 + (1 - 2b)u + b^2 - 1 = 0$ を得る。

円と曲線が異なる 4 個の交点をもつためには、この u の 2 次方程式が異なる 2 つの正の解をもてばよい。解の和は $2b - 1$ であり、解の積は $b^2 - 1$ である。また判別式は $(1 - 2b)^2 - 4(b^2 - 1) = 5 - 4b$ である。したがって必要十分条件は $2b - 1 > 0, \quad b^2 - 1 > 0, \quad 5 - 4b > 0$ である。これらを合わせると $1 < b < \frac{5}{4}$ である。

(2) α^2, β^2 は、(1) で得た 2 次方程式 $u^2 + (1 - 2b)u + b^2 - 1 = 0$ の 2 つの正の解であり、 $0 < \beta < \alpha$ である。したがって根と係数の関係より $\alpha^2 + \beta^2 = 2b - 1$ である。また 2 解の差は判別式の平方根に等しいので $\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{5 - 4b}$ である。

曲線 $C: y = -x^2 + b$ は $x^2 = b - y$ と書ける。高さ y での水平断面を y 軸のまわりに回転すると、半径 $\sqrt{b - y}$ の円板になる。領域の下端と上端はそれぞれ $y = f(\alpha) = b - \alpha^2, \quad y = f(\beta) = b - \beta^2$ である。したがって体積 V は

$$V = \pi \int_{b-\alpha^2}^{b-\beta^2} (b-y) dy$$

である。

ここで $u = b - y$ とおくと

$$V = \pi \int_{\beta^2}^{\alpha^2} u du = \frac{\pi}{2} (\alpha^4 - \beta^4)$$

である。よって

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{2} (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) \\ &= \frac{\pi}{2} (2b - 1) \sqrt{5 - 4b} \end{aligned}$$

である。

▶ 解法 2 (円筒殻に分けて体積を求める方法)

【方針】

交点条件は解法 1 と同様に $u = x^2$ の 2 次方程式で処理する。体積は半径 x の円筒殻に分け、 $0 \leq x \leq \beta$ と $\beta \leq x \leq \alpha$ で殻の高さを分ける。

【解答】

(1) $u = x^2$ とおくと交点条件は

$$u^2 + (1 - 2b)u + b^2 - 1 = 0$$

である。異なる 2 つの正の解をもつ条件は、解の和・積・判別式から

$$2b - 1 > 0, \quad b^2 - 1 > 0, \quad 5 - 4b > 0.$$

よって

$$1 < b < \frac{5}{4}.$$

(2) 根と係数の関係から

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2b - 1, \quad \alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{5 - 4b}.$$

半径 x の円筒殻の高さは、 $0 \leq x \leq \beta$ では $\alpha^2 - \beta^2$ 、 $\beta \leq x \leq \alpha$ では $\alpha^2 - x^2$ である。したがって

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^\beta x(\alpha^2 - \beta^2) dx + 2\pi \int_\beta^\alpha x(\alpha^2 - x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{2}(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned}$$

ゆえに

$$V = \frac{\pi}{2}(2b - 1)\sqrt{5 - 4b}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 24 分程度。円と放物線の交点数を $u = x^2$ の 2 次方程式で判定し、その 2 解を体積計算にも利用する問題である。4 交点条件では「正の異なる 2 解」が必要なので、和・積・判別式をすべて確認する。回転体の体積は水平断面の円板で考えると、半径の 2 乗が $b - y$ になり計算が短くなる。最後は $\alpha^2 \pm \beta^2$ を根と係数・判別式で置き換えるのが要点である。水平断面の円板法と縦の円筒殻法の 2 通りで体積を計算し、 $\alpha^2 \pm \beta^2$ だけで同じ式に整理できることを確認した。

【第 5 問】

以下の問いに答えよ。必要ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

を用いてよい。

(1) 2 以上の整数 n に対して不等式

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n$$

を示せ。

(2) 正の整数 n に対し

$$a_n = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$$

により数列 $\{a_n\}$ を定める。このとき、等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{2}$$

を示せ。

(3) さらに正の整数 n に対し

$$b_n = \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n}{n^2}$$

により数列 $\{b_n\}$ を定めるとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

▶ 解法 1 (積分比較から調和和を評価する方法)

【方針】

(1) は $1/x$ の単調減少性を使い、各 $1/k$ を区間 $[k-1, k]$ の定積分より小さく評価する。(2) は a_n を簡単化し、(1) で調和和をはさむ。(3) は重みつき和を調和和 H_n で正確に表す。

【解答】

(1) $k \geq 2$ とする。 $1/x$ は正の範囲で単調減少するから、 $k-1 < x < k$ では $1/x > 1/k$ である。したがって

$$\frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}.$$

これを $k = 2, 3, \dots, n$ について加えると

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n.$$

(2)

$$a_n = \frac{n(n+1)/2}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

よって

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

(1) より

$$0 < \frac{1}{2n} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) < \frac{1 + \log n}{2n} \rightarrow 0.$$

はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

(3) $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ とおく。 $a_k = 1/2 + 1/(2k)$ だから

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (n-k+1)a_k \\ &= \frac{n(n+1)}{4n^2} + \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{k} \\ &= \frac{n+1}{4n} + \frac{(n+1)H_n - n}{2n^2}. \end{aligned}$$

ここで $H_n < 1 + \log n$ より第 2 項は 0 へ収束する。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{4}.$$

▶ 解法 2 (累積和へ並べ替える方法)

【方針】

(1)(2) で調和和の評価と a_n の式を得る。(3) の三角形状の重みつき和を累積和 $A_j = a_1 + \cdots + a_j$ の和へ並べ替え、誤差全体を一度にはさむ。

【解答】

(1) 各 $k = 2, \dots, n$ について

$$\frac{1}{k} < \int_{k-1}^k \frac{dx}{x}$$

である。辺々を加えて

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n$$

を得る。

(2) $a_k = 1/2 + 1/(2k)$ なので

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2} + \frac{H_n}{2n}.$$

$0 < H_n < 1 + \log n$ と与えられた極限から $H_n/n \rightarrow 0$ である。したがって極限は $1/2$ である。

(3) $A_j = a_1 + \cdots + a_j$ とおく。各 a_k が $A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ に 1 回ずつ現れることから

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

また

$$A_j = \frac{j}{2} + \frac{H_j}{2}.$$

したがって

$$b_n = \frac{n(n+1)}{4n^2} + \frac{1}{2n^2} \sum_{j=1}^n H_j.$$

$0 < H_j \leq H_n < 1 + \log n$ より

$$0 < \frac{1}{2n^2} \sum_{j=1}^n H_j < \frac{1 + \log n}{2n} \rightarrow 0.$$

ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{4}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 22 分程度。(1) の積分比較を (2)(3) の誤差評価へ連鎖させる構成である。積分は必ず区間ごとに大小の向きを確認し、調和和を $1 + \log n$ で上から押さえる。(3) は重みを直接計算する方法と累積和へ並べ替える方法の 2 通りで $1/4$ を確認した。有限和の添字と n^2 で割る位置が主な失点源である。

【第 6 問】

座標空間において、3 点 $A(6, 6, 3)$ 、 $B(4, 0, 6)$ 、 $C(0, 6, 6)$ を通る平面を α とする。以下の問いに答えよ。

- (1) α に垂直で大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。
- (2) 中心が点 $P(a, b, c)$ で半径が r の球が平面 α 、 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面のすべてに接し、かつ $a \geq 0$ 、 $b \geq 0$ が満たされている。このような点 P と r の組をすべて求めよ。

▶ 解法 1 (平面内の 2 ベクトルとの内積を 0 にする方法)

【方針】

平面内の 2 ベクトル $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直なベクトルを連立方程式で求める。平面の方程式を作り、4 平面への距離がすべて半径 r に等しい条件を符号別に解く。

【解答】

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -6, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (-6, 0, 3).$$

$\vec{n} = (p, q, s)$ が両方に垂直である条件は

$$-2p - 6q + 3s = 0, \quad -6p + 3s = 0.$$

これを解くと (p, q, s) は $(3, 2, 6)$ の実数倍である。 $|(3, 2, 6)| = 7$ だから、求める単位ベクトルは

$$\left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right), \quad \left(-\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}\right).$$

(2) 法線ベクトル $(3, 2, 6)$ を用いると、平面 α は

$$3x + 2y + 6z = 48$$

である。球が 3 つの座標平面すべてに接する条件は

$$|a| = |b| = |c| = r.$$

$a, b \geq 0$ より $a = b = r$ であり、 $c = r$ または $c = -r$ である。

さらに平面 α までの距離が r だから

$$\frac{|3a + 2b + 6c - 48|}{7} = r.$$

$c = r$ のとき

$$|11r - 48| = 7r$$

であり、 $r = 12$ または $r = 8/3$ を得る。 $c = -r$ のとき

$$|-r - 48| = 7r$$

より $r = 8$ である。したがって求める組は

$$(P, r) = ((12, 12, 12), 12), \left(\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right), \frac{8}{3}\right), ((8, 8, -8), 8).$$

▶ 解法 2 (平面の一般形へ 3 点を代入する方法)

【方針】

平面を $ux + vy + wz = d$ と置き、3 点の代入から係数比と定数を決める。(2) は座標平面との接触から中心を 8 象限の符号で表し、指定された符号条件で 2 場合に絞る。

【解答】

(1) 平面を $ux + vy + wz = d$ とおく。3 点を代入すると

$$6u + 6v + 3w = d, \quad 4u + 6w = d, \quad 6v + 6w = d.$$

辺々の差から

$$2u + 6v - 3w = 0, \quad 6u - 3w = 0$$

となり、 $u : v : w = 3 : 2 : 6$ を得る。したがって単位法線ベクトルは

$$\pm \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right).$$

(2) 係数を $(3, 2, 6)$ と取れば、 A の代入から $d = 48$ である。座標平面への距離がすべて r で、 $a, b \geq 0$ だから

$$P = (r, r, r) \quad \text{または} \quad P = (r, r, -r).$$

前者では平面までの距離条件が

$$\frac{|11r - 48|}{7} = r$$

となる。絶対値の中が非負なら $r = 12$ 、負なら $r = 8/3$ で、どちらも仮定した符号と整合する。後者では

$$\frac{r + 48}{7} = r$$

より $r = 8$ である。よって

$$(P, r) = ((12, 12, 12), 12), \left(\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3} \right), \frac{8}{3} \right), ((8, 8, -8), 8).$$

【総評】 難度 5、計算量 5。想定時間は 18 分程度。法線ベクトルを求めた後、点と平面の距離公式と座標平面への距離を同時に使う問題である。 a, b の符号指定により中心は $r, r, \pm r$ の 2 場合へ絞れる。絶対値方程式では各枝の符号条件を戻って確認する。平面内ベクトルとの内積法と平面の一般形への代入法で法線・平面方程式・3 組の答えを照合した。