

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2021 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

a, b を実数とする。曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 (a, b) の領域を図示せよ。

第 2 問

a, b を $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ を満たす実数とする。平面上の三角形 ABC を考え、辺 AB を $a : 1 - a$ に内分する点を P 、辺 BC を $b : 1 - b$ に内分する点を Q 、辺 CA の中点を R とし、三角形 ABC の面積を S 、三角形 PQR の面積を T とする。

- (1) $\frac{T}{S}$ を a, b で表せ。
- (2) a, b が $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき、 $\frac{T}{S}$ がとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) p, q を 3 以上の整数とし、 $a = \frac{1}{p}$, $b = \frac{1}{q}$ とする。 $\frac{T}{S}$ の逆数 $\frac{S}{T}$ が整数となるような p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。

第 3 問

正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ について，以下の問いに答えよ。

- (1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ。
- (2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。
- (3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件 (*) を満たすものの個数を求めよ。
(*) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

第 4 問

座標平面において、次の条件 (*) を満たす直線 l を考える。

(*) l の傾きは 1 で、曲線 $y = x^3 - 2x$ と異なる 3 点で交わる。

その交点を x 座標が小さなものから順に P, Q, R とし、さらに線分 PQ の中点を S とする。

- (1) 点 R の座標を $(a, a^3 - 2a)$ とするとき、点 S の座標を求めよ。
- (2) 直線 l が条件 (*) を満たしながら動くとき、点 S の軌跡を求めよ。
- (3) 直線 l が条件 (*) を満たしながら動くとき、線分 PS が動いてできる領域の面積を求めよ。

第 5 問

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $O(0)$, $A(z)$, $B(z^2)$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点 O , A , B が同一直線上にあるための z の必要十分条件を求めよ。
- (2) 3 点 O , A , B が二等辺三角形の頂点になるような z 全体を複素数平面上に図示せよ。
- (3) 3 点 O , A , B が二等辺三角形の頂点であり、かつ z の偏角 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ を満たすとき、三角形 OAB の面積の最大値とそのときの z の値を求めよ。

第 6 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の等式が成り立つことを示せ。ただし、 e は自然対数の底とする。

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

- (2) 正の実数 a と正の整数 n に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

- (3) 不等式

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数 n を求めよ。必要ならば $2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてもよい。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)