

# 東北大学 2021 年度 理系

## 解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

### 【第 1 問】

$a, b$  を実数とする。曲線  $y = ax^2 + bx + 1$  が  $x$  軸の正の部分と共有点をもたないような点  $(a, b)$  の領域を図示せよ。

### ▶ 解法 1 (正の範囲での最小値を調べる方法)

#### 【方針】

$g(x) = ax^2 + bx + 1$  とおき、 $x > 0$  で  $g(x) = 0$  をもたない条件を調べる。 $a < 0$  では  $x \rightarrow \infty$  で必ず負になるので除外する。 $a = 0$  は一次式として直接判定する。 $a > 0$  では、 $b \geq 0$  なら正の範囲で増加方向にあり根をもたず、 $b < 0$  なら頂点が  $x > 0$  に入るため最小値が正である条件  $b^2 < 4a$  を使う。境界が含まれるかどうかは、正の  $x$  軸との共有点が生じるかで判断する。

#### 【解答】

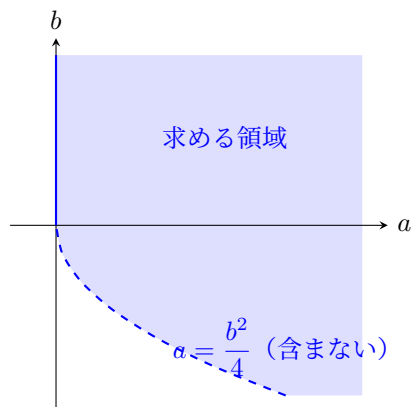
$g(x) = ax^2 + bx + 1$  とおく。求める条件は、方程式  $g(x) = 0$  が  $x > 0$  の解をもたないことである。

まず  $a < 0$  のとき、 $g(0) = 1$  である一方、 $x \rightarrow \infty$  とすると  $g(x) \rightarrow -\infty$  である。したがって連続性より  $x > 0$  に解をもつので、この場合は不適である。

次に  $a = 0$  のとき、 $g(x) = bx + 1$  である。 $b < 0$  なら  $x = -\frac{1}{b} > 0$  で解をもつ。 $b \geq 0$  なら  $x > 0$  で  $bx + 1 > 0$  であるから解をもたない。よって  $a = 0$ ,  $b \geq 0$  は条件を満たす。

最後に  $a > 0$  の場合を考える。 $b \geq 0$  なら、 $x > 0$  において  $g(x) = ax^2 + bx + 1 > 0$  であるから、解をもたない。 $b < 0$  のとき、頂点の  $x$  座標は  $-\frac{b}{2a} > 0$  であり、正の範囲に入る。したがって  $x > 0$  で解をもたないための条件は、頂点での最小値が正であること、すなわち  $1 - \frac{b^2}{4a} > 0$  である。これは  $b^2 < 4a$  と同値である。

以上より、求める領域は  $a = 0$ ,  $b \geq 0$  および  $a > 0$ ,  $b \geq 0$  および  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $b^2 < 4a$  を合わせた領域である。すなわち、 $(a, b)$  平面では、 $a$  軸の右側で  $b \geq 0$  の部分を境界  $a = 0$  上の  $b \geq 0$  も含めて取り、さらに  $b < 0$  では放物線  $a = \frac{b^2}{4}$  の右側だけを取る。ただし  $b < 0$  側の放物線上は重解をもち共有点が生じるので含まない。



## ▶ 解法 2 (2 次方程式の根の符号で判定する方法)

### 【方針】

方程式  $ax^2 + bx + 1 = 0$  の正の根の有無を、係数  $a$  の符号と根と係数の関係で調べる。 $a > 0$  では実根がある場合の 2 根は同符号なので、その和で正負を判定する。

### 【解答】

$a < 0$  のとき、2 根の積は  $1/a < 0$  である。したがって実数解は異符号であり、必ず正の解をもつので除外される。

$a = 0$  のときは  $bx + 1 = 0$  である。正の解をもたない条件は  $b \geq 0$  である。

$a > 0$  とする。判別式  $D = b^2 - 4a$  が負なら実数解をもたないので条件を満たす。 $D \geq 0$  なら、2 根の積は  $1/a > 0$  だから 2 根は同符号である。その和は  $-b/a$  なので、正の根をもたないための必要十分条件は  $-b/a < 0$ 、すなわち  $b > 0$  である。 $b = 0$  では  $D = -4a < 0$  なので、これも含まれる。

以上より、 $a > 0$  では

$$b \geq 0 \quad \text{または} \quad b < 0 \text{ かつ } b^2 < 4a$$

であり、 $a = 0, b \geq 0$  を合わせれば解法 1 と同じ領域を得る。

**【総評】** 難度 5、計算量 4。想定時間は 16 分程度。正の  $x$  軸との共有点をもたない条件を、 $x > 0$  における二次式の根の有無として調べる問題である。 $a < 0$  は判別式ではなく極限で必ず正の根をもつと判断するのが早い。 $a > 0, b < 0$  のときだけ頂点が正の範囲に入るため、最小値の正負を調べる。境界  $b^2 = 4a$  は接するので除外する点が図示での注意点である。最小値による判定と根の符号による判定が同じ境界を与えることを確認した。図では青実線を含み、負の側の放物線境界は共有点を生じるため破線で除外している。

### 【第 2 問】

$a, b$  を  $0 < a < 1, 0 < b < 1$  を満たす実数とする。平面上の三角形  $ABC$  を考え、辺  $AB$  を  $a : 1 - a$  に内分する点を  $P$ 、辺  $BC$  を  $b : 1 - b$  に内分する点を  $Q$ 、辺  $CA$  の中点を  $R$  とし、三角形  $ABC$  の面積を  $S$ 、三角形  $PQR$  の面積を  $T$  とする。

(1)  $\frac{T}{S}$  を  $a, b$  で表せ。

(2)  $a, b$  が  $0 < a < \frac{1}{2}, 0 < b < \frac{1}{2}$  の範囲を動くとき、 $\frac{T}{S}$  がとりうる値の範囲を求めよ。

(3)  $p, q$  を 3 以上の整数とし、 $a = \frac{1}{p}, b = \frac{1}{q}$  とする。 $\frac{T}{S}$  の逆数  $\frac{S}{T}$  が整数となるような  $p, q$  の組  $(p, q)$  をすべて求めよ。

## ▶ 解法 1 (標準三角形へ座標化する方法)

### 【方針】

面積比はアフィン変換で変わらないので、三角形を  $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (0, 1)$  に標準化する。点  $P, Q, R$  の座標を出し、行列式で  $T/S$  を求める。範囲問題では  $0 < a, b < 1/2$  で  $1 - 2a > 0$  となることから、固定した  $a$  に対して  $b$  が大きいほど面積比が小さくなると見る。整数条件では  $a = 1/p, b = 1/q$  を代入し、 $S/T$  が整数になる可能性をまず大小で 3 に絞り、最後に因数分解で  $(p, q)$  を決める。

### 【解答】

(1)

面積比は三角形  $ABC$  の形によらないので、 $A = (0, 0), B = (1, 0), C = (0, 1)$  としてよい。このとき三角形  $ABC$  の面積は  $S = \frac{1}{2}$  である。

点  $P, Q, R$  の座標は、内分比の定義から  $P = (a, 0), Q = (1 - b, b), R = (0, \frac{1}{2})$  である。したがって

$$\overrightarrow{PQ} = (1 - a - b, b), \quad \overrightarrow{PR} = \left(-a, \frac{1}{2}\right)$$

である。よって

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left| \frac{1 - a - b}{2} + ab \right| \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1 - a - b}{2} + ab \right\} \end{aligned}$$

である。 $0 < a < 1, 0 < b < 1$  では  $1 - a - b + 2ab = (1 - a)(1 - b) + ab > 0$  なので絶対値は外せる。したがって  $\frac{T}{S} = \frac{1 - a - b + 2ab}{2}$  である。

(2)

(1) より  $\frac{T}{S} = \frac{1 - a - b + 2ab}{2} = \frac{1 - a - b(1 - 2a)}{2}$  である。 $0 < a < \frac{1}{2}$  では  $1 - 2a > 0$  であるから、固定した  $a$  に対してこの値は  $b$  が大きいほど小さくなる。

上限については、 $a \rightarrow 0+, b \rightarrow 0+$  とすると  $\frac{T}{S} \rightarrow \frac{1}{2}$  である。一方、 $a > 0, b > 0$  なので  $1 - a - b + 2ab < 1$  であり、実際の値は  $\frac{1}{2}$  にはならない。

下限については、 $b \rightarrow \frac{1}{2}$  (下から) とすると  $\frac{1 - a - b + 2ab}{2} \rightarrow \frac{1 - a - \frac{1}{2} + a}{2} = \frac{1}{4}$  である。一方、 $b < \frac{1}{2}$  かつ  $1 - 2a > 0$  より  $1 - a - b(1 - 2a) > 1 - a - \frac{1}{2}(1 - 2a) = \frac{1}{2}$  だから、実際の値は  $\frac{1}{4}$  より大きい。したがって値の範囲は  $\frac{1}{4} < \frac{T}{S} < \frac{1}{2}$  である。

(3)  $a = \frac{1}{p}, b = \frac{1}{q}$  とすると、(1) より  $\frac{T}{S} = \frac{pq - p - q + 2}{2pq}$  である。したがって  $\frac{S}{T} = \frac{2pq}{pq - p - q + 2}$  である。 $p, q \geq 3$  のとき  $\frac{1}{4} < \frac{T}{S} < \frac{1}{2}$  であるから  $2 < \frac{S}{T} < 4$  である。よって  $\frac{S}{T}$  が整数であるなら、その値は 3 に限られる。したがって  $\frac{2pq}{pq - p - q + 2} = 3$  であり、整理すると  $pq - 3p - 3q + 6 = 0$  である。さらに  $(p - 3)(q - 3) = pq - 3p - 3q + 9 = 3$  となる。 $p - 3, q - 3$  は正の整数なので  $(p - 3, q - 3) = (1, 3), (3, 1)$  である。よって求める組は  $(p, q) = (4, 6), (6, 4)$  である。

## ▶ 解法 2 (2 本の基底ベクトルの係数で面積比を出す方法)

【方針】

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$  と置き、各点を  $\vec{u}, \vec{v}$  の係数で表す。三角形 PQR の面積比は、2 辺の係数を交差させた差の絶対値として直接求める。

【解答】

(1)  $A$  を原点とし、 $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}$  とおく。内分点は

$$\overrightarrow{AP} = a\vec{u}, \quad \overrightarrow{AQ} = (1 - b)\vec{u} + b\vec{v}, \quad \overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\vec{v}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{PQ} = (1 - a - b)\vec{u} + b\vec{v}, \quad \overrightarrow{PR} = -a\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

2 本のベクトルが作る三角形の面積を係数で比較すると

$$\frac{T}{S} = \left| (1 - a - b) \cdot \frac{1}{2} - b(-a) \right| = \frac{1 - a - b + 2ab}{2}.$$

最後の式は  $(1 - a)(1 - b) + ab > 0$  なので絶対値を外せる。

(2)

$$\frac{T}{S} - \frac{1}{4} = \frac{(1 - 2a)(1 - 2b)}{4} > 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{T}{S} = \frac{a + b - 2ab}{2} > 0$$

である。 $a, b$  をそれぞれ  $1/2$  または  $0$  へ近づければ両端へいくらかでも近づけるから

$$\frac{1}{4} < \frac{T}{S} < \frac{1}{2}$$

である。

(3)  $a = 1/p, b = 1/q$  を代入すると

$$\frac{S}{T} = \frac{2pq}{pq - p - q + 2}.$$

(2) より整数値は 3 しかない。よって

$$pq - 3p - 3q + 6 = 0 \iff (p - 3)(q - 3) = 3.$$

$p, q \geq 3$  から

$$(p, q) = (4, 6), (6, 4)$$

を得る。

【総評】 難度 6、計算量 6。想定時間は 22 分程度。三角形の面積比を座標化と行列式で求め、後半を不等式と整数条件に接続する問題である。面積比は  $(1 - a - b + 2ab)/2$  であり、ここで  $1/2$  を落とすと後の整数条件まで結論が変わる。範囲から  $S/T$  の整数値を 3 に絞ると、最後は  $(p - 3)(q - 3) = 3$  だけを解けばよい。別解として一般三角形のベクトルで直接行列式を計算することもできるが、標準座標に移す方が検算しやすい。座標法と基底ベクトル法の双方で面積比を確認し、範囲は差の積への因数分解でも検算した。

### 【第 3 問】

正八角形  $A_1A_2 \cdots A_8$  について、以下の問いに答えよ。

- (1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形であるものの個数を求めよ。
- (2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。
- (3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち、次の条件 (\*) を満たすものの個数を求めよ。  
(\*) 四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

### ▶ 解法 1 (直径を軸に包除原理で数える方法)

#### 【方針】

正八角形の頂点は同一円周上にあるので、直角三角形は「直径を一辺にもつ三角形」として数える。(2) では全三角形から直角三角形と二等辺三角形を除き、直角二等辺三角形を重複補正する。(3) の条件は、4 頂点の中に向かい合う 2 頂点、すなわち直径の両端が含まれることと同値である。直径を選んで数える方法に加え、直径を 1 本も含まない 4 頂点を補集合として数える別解も使える。

#### 【解答】

(1)

円周上の 3 点でできる三角形が直角三角形であるための条件は、その三角形の 1 辺が外接円の直径であることである。正八角形には向かい合う頂点の組、すなわち直径の両端となる組が 4 組ある。直径の両端を選んだあと、残り 1 点はその 2 点以外の 6 個の頂点から選べる。したがって直角三角形の個数は  $4 \cdot 6 = 24$  である。

(2)

3 個の頂点の選び方は  ${}_8C_3 = 56$  通りである。

二等辺三角形を数える。頂角となる頂点を 1 つ固定すると、その左右に同じだけ離れた 2 頂点を選べばよい。距離は 1 つ隣、2 つ隣、3 つ隣の 3 通りであるから、二等辺三角形は  $8 \cdot 3 = 24$  通りである。この数え方では正三角形のような重複は起こらない。

直角三角形かつ二等辺三角形であるものは、直径の両端を斜辺にし、残りの頂点がその中間方向にある場合である。各直径に対して 2 通りあるので  $4 \cdot 2 = 8$  通りである。

よって、直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数は  $56 - 24 - 24 + 8 = 16$  である。

(3)

条件 (\*) を満たすとは、選んだ 4 頂点の中のある 3 点が直角三角形を作ることである。これは、選んだ 4 頂点の中に向かい合う 2 頂点、すなわち直径の両端が含まれることと同値である。

直径を 1 本選ぶ方法は 4 通りである。残りの 2 頂点は、その直径の両端を除いた 6 頂点から選べるので  $4 \cdot {}_6C_2 = 60$  通りである。ただし、2 本の直径を含む 4 頂点は、どちらの直径を先に選んだかで 2 回数えられている。2 本の直径の選び方は  ${}_4C_2 = 6$  通りであるから、求める個数は  $60 - 6 = 54$  である。

## ▶ 解法 2 (四角形を補集合で数える方法)

### 【方針】

(1)(2) は円周角と二等辺三角形の頂点を固定して数える。(3) は条件を満たさない 4 頂点、すなわち 4 組の対頂点から片方ずつ選ぶ場合を補集合として数える。

### 【解答】

(1) 正八角形の頂点からできる直角三角形は、斜辺が外接円の直径である。直径は 4 本あり、残りの頂点は 6 通りだから

$$4 \cdot 6 = 24$$

個である。

(2) 三角形の総数は  ${}_8C_3 = 56$  個である。二等辺三角形は頂点を 8 通り、その左右へ同じ歩数だけ進んだ底角の 2 頂点を 3 通りに選べるので 24 個である。直角三角形も (1) より 24 個であり、両方に数えられる直角二等辺三角形は各直径につき 2 個、計 8 個である。したがって

$$56 - 24 - 24 + 8 = 16$$

個である。

(3) 条件を満たさないのは、選んだ 4 頂点の中に直径の両端が 1 組もない場合である。向かい合う頂点の組は 4 組あり、4 頂点を選ぶには各組からちょうど 1 点ずつ選ばなければならない。その選び方は  $2^4 = 16$  通りである。全四角形は  ${}_8C_4 = 70$  個だから

$$70 - 16 = 54$$

個である。

【総評】 難度 5、計算量 5。想定時間は 16 分程度。正八角形の頂点選択を、円周角の定理と対称性で数える問題である。直角条件を「直径を含む」と言い換えることが全体の鍵になる。(2) では直角と二等辺の重複を補正する必要があり、直角二等辺三角形 8 個を戻すのを忘れやすい。(3) は直径を含む 4 頂点の数え上げで、直接数える方法と補集合で数える方法の両方が自然である。第 3 問は直径を含む集合の包除と、直径を含まない集合の補集合という独立な 2 通りで 54 を確認した。

### 【第 4 問】

座標平面において、次の条件 (\*) を満たす直線  $l$  を考える。

(\*)  $l$  の傾きは 1 で、曲線  $y = x^3 - 2x$  と異なる 3 点で交わる。

その交点を  $x$  座標が小さなものから順に  $P, Q, R$  とし、さらに線分  $PQ$  の中点を  $S$  とする。

(1) 点  $R$  の座標を  $(a, a^3 - 2a)$  とするとき、点  $S$  の座標を求めよ。

(2) 直線  $l$  が条件 (\*) を満たしながら動くとき、点  $S$  の軌跡を求めよ。

(3) 直線  $l$  が条件 (\*) を満たしながら動くとき、線分  $PS$  が動いてできる領域の面積を求めよ。

### 【方針】

直線を  $y = x + c$  とおくと、交点の  $x$  座標は  $x^3 - 3x - c = 0$  の 3 根になる。最大根を  $a$  とし、 $c = a^3 - 3a$  を代入して残り 2 根を根と係数の関係で扱う。3 つの異なる交点をもつ条件は、最大根が  $1 < a < 2$  を動くことに対応する。掃過面積では、 $(u, v) = (x, y - x)$  というせん断で直線群を水平線に直す。この変換は平行四辺形の面積を保つので、線分  $PS$  の水平長を  $v = c$  方向に積分する。

### 【解答】

(1)

直線  $l$  の傾きは 1 なので  $l: y = x + c$  とおける。曲線  $y = x^3 - 2x$  との交点の  $x$  座標は  $x^3 - 2x = x + c$  すなわち  $x^3 - 3x - c = 0$  の解である。

点  $R$  の座標が  $(a, a^3 - 2a)$  であるから、 $a$  はこの方程式の解であり  $c = a^3 - 3a$  である。したがって  $x^3 - 3x - (a^3 - 3a) = 0$  であり、左辺を因数分解すると  $(x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0$  である。残り 2 根、すなわち  $P, Q$  の  $x$  座標の和は  $-a$  である。よって線分  $PQ$  の中点  $S$  の  $x$  座標は  $-\frac{a}{2}$  である。

点  $S$  は直線  $y = x + c$  上にあるので、 $y = -\frac{a}{2} + a^3 - 3a = a^3 - \frac{7}{2}a$  である。したがって  $S\left(-\frac{a}{2}, a^3 - \frac{7}{2}a\right)$  である。

(2)  $x^3 - 3x - c = 0$  が異なる 3 つの実数解をもつのは、 $y = x^3 - 3x$  の極大値と極小値の間に  $c$  があるときである。 $x^3 - 3x$  は  $x = -1$  で極大値 2,  $x = 1$  で極小値  $-2$  をとるから  $-2 < c < 2$  である。

最大根  $a$  は右側の枝にあるので  $1 < a < 2$  である。(1) で  $S = (X, Y)$  とおくと  $X = -\frac{a}{2}$  であるから  $a = -2X$  であり、 $Y = a^3 - \frac{7}{2}a = -8X^3 + 7X$  である。 $1 < a < 2$  は  $-1 < X < -\frac{1}{2}$  に対応する。したがって点  $S$  の軌跡は  $Y = -8X^3 + 7X$ ,  $-1 < X < -\frac{1}{2}$  である。

(3)  $P, Q$  の  $x$  座標は、方程式  $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$  の 2 解である。判別式は  $a^2 - 4(a^2 - 3) = 12 - 3a^2$  だから、2 解は  $\frac{-a - \sqrt{12 - 3a^2}}{2}$ ,  $\frac{-a + \sqrt{12 - 3a^2}}{2}$  である。したがって  $P$  の  $x$  座標と  $S$  の  $x$  座標の差は  $-\frac{a}{2} - \frac{-a - \sqrt{12 - 3a^2}}{2} = \frac{\sqrt{12 - 3a^2}}{2}$  である。

ここで  $(u, v) = (x, y - x)$  とおく。この変換では、縦方向の長さを変えず、横に平行移動させるだけなので面積は保たれる。また直線  $y = x + c$  は  $v = c$  という水平線になる。線分  $PS$  は  $v = c = a^3 - 3a$  上の水平線分になり、その長さは上で求めた  $\frac{\sqrt{12 - 3a^2}}{2}$  である。 $1 < a < 2$  において  $\frac{dc}{da} = 3a^2 - 3 > 0$  であるから、 $c$  は単調に増加する。よって求める面積  $A$  は

$$A = \int_1^2 \frac{\sqrt{12 - 3a^2}}{2} (3a^2 - 3) da$$

である。 $a = 2 \sin \phi$  とおくと、 $a = 1$  で  $\phi = \frac{\pi}{6}$ ,  $a = 2$  で  $\phi = \frac{\pi}{2}$  であり、 $\sqrt{12 - 3a^2} = 2\sqrt{3} \cos \phi$ ,  $da = 2 \cos \phi d\phi$  である。したがって

$$\begin{aligned} A &= 6\sqrt{3} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (4 \sin^2 \phi - 1) \cos^2 \phi d\phi \\ &= 6\sqrt{3} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \{\sin^2 2\phi - \cos^2 \phi\} d\phi \end{aligned}$$

である。ここで

$$\int \{\sin^2 2\phi - \cos^2 \phi\} d\phi = -\frac{\sin 4\phi}{8} - \frac{\sin 2\phi}{4}$$

だから

$$A = 6\sqrt{3} \left\{ 0 - \left( -\frac{3\sqrt{3}}{16} \right) \right\} = \frac{27}{8}$$

となる。したがって求める面積は  $\frac{27}{8}$  である。

【総評】 難度 8、計算量 7。想定時間は 28 分程度。3 次方程式の 3 根を交点の  $x$  座標として扱い、根と係数の関係から中点を出す問題である。(2) では 3 交点条件を  $1 < a < 2$  に翻訳すること、(3) では直線群を  $y - x = c$  の水平線として見るのが中心になる。最後の面積計算は、線分の長さ  $dc/da$  を掛けて積分する形に落とせればよい。別解として包絡線を追う方法も考えられるが、計算量が増えやすい。

【第 5 問】

$z$  を複素数とする。複素数平面上の 3 点  $O(0)$ ,  $A(z)$ ,  $B(z^2)$  について、以下の問いに答えよ。

- (1) 3 点  $O, A, B$  が同一直線上にあるための  $z$  の必要十分条件を求めよ。
- (2) 3 点  $O, A, B$  が二等辺三角形の頂点になるような  $z$  全体を複素数平面上に図示せよ。
- (3) 3 点  $O, A, B$  が二等辺三角形の頂点であり、かつ  $z$  の偏角  $\theta$  が  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  を満たすとき、三角形  $OAB$  の面積の最大値とそのときの  $z$  の値を求めよ。

▶ 解法 1 (極形式で 3 種類の二等辺条件を調べる方法)

【方針】

$z = re^{i\theta}$  とおくと、三辺の長さは  $OA = r$ ,  $OB = r^2$ ,  $AB = r|z - 1|$  になる。(1) の共線条件は、 $z^2$  が  $z$  の実数倍になること、つまり  $z$  が実数であることに帰着する。(2) の二等辺条件は 3 辺の等式  $OA = OB$ ,  $OA = AB$ ,  $OB = AB$  に分け、それぞれ単位円、中心 1 半径 1 の円、直線  $\Re z = 1/2$  を得る。面積最大では、各軌跡を  $0 \leq \theta \leq \pi/3$  に制限して  $\frac{1}{2}r^3 \sin \theta$  を比較する。

【解答】

(1)  $z = 0$  のときは 3 点  $O, A, B$  は同一直線上にある。以下  $z \neq 0$  とする。

3 点  $O(0), A(z), B(z^2)$  が同一直線上にあることは、 $z^2$  が  $z$  の実数倍であることと同値である。すなわち、ある実数  $\lambda$  があって  $z^2 = \lambda z$  となることである。 $z \neq 0$  より両辺を  $z$  で割ると  $z = \lambda$  となる。したがって  $z$  は実数である。

逆に  $z$  が実数なら、 $0, z, z^2$  はすべて実軸上にあるので 3 点は同一直線上にある。よって必要十分条件は  $z$  が実数であることである。

(2)  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  ( $r = |z|$ ) とおく。三辺の長さは  $OA = r$ ,  $OB = r^2$ ,  $AB = |z^2 - z| = r|z - 1|$  である。二等辺三角形になる条件は次の 3 つのいずれかである。

まず  $OA = OB$  は  $r = r^2$  であり、三角形を作る場合には  $r \neq 0$  なので  $r = 1$  である。これは単位円である。

次に  $OA = AB$  は  $r = r|z - 1|$  であり、 $r \neq 0$  より  $|z - 1| = 1$  である。これは中心 1, 半径 1 の円である。

最後に  $OB = AB$  は  $r^2 = r|z - 1|$  であり、 $r \neq 0$  より  $|z| = |z - 1|$  である。これは 2 点  $0, 1$  から等距離にある点の集合なので  $\Re z = \frac{1}{2}$  である。

したがって求める集合は、単位円、中心 1 半径 1 の円、直線  $\Re z = \frac{1}{2}$  の和集合から、三角形がつぶれる実軸上の点を除いたものである。

(3)  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  とすると、三角形  $OAB$  の面積は、辺  $OA$  と  $OB$  のなす角が  $\theta$  であることから  $\frac{1}{2} \cdot r \cdot r^2 \sin \theta = \frac{1}{2}r^3 \sin \theta$  である。以下、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  で、(2) の 3 つの場合を調べる。 $r = 1$  の場合、面積は  $\frac{1}{2} \sin \theta$  であり、最大値は  $\theta = \frac{\pi}{3}$  のとき  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  である。 $|z| = |z - 1|$  の場合、極形式では  $r = \frac{1}{2 \cos \theta}$  である。このとき面積は  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2 \cos \theta} \right)^3 \sin \theta$  であり、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  で最大となるのは  $\theta = \frac{\pi}{3}$  のときで、最大値は  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  である。 $|z - 1| = 1$  の場合、極形式では  $r = 2 \cos \theta$  である。面積は  $\frac{1}{2} (2 \cos \theta)^3 \sin \theta = 4 \cos^3 \theta \sin \theta$  である。これを  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$  で最大化する。微分すると

$$\frac{d}{d\theta} (4 \cos^3 \theta \sin \theta) = 4 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta)$$

であるから、最大は  $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{6}$  のときに起こる。このとき  $r = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$  であり、面積は  $4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$  である。

したがって最大値は  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$  であり、そのとき

$$z = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。

## ▶ 解法 2 (実部・虚部の座標で最大化する方法)

### 【方針】

$z = x + yi$  と置き、3 辺の長さの等式を円 2 本と垂直二等分線へ直す。面積を  $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)y$  と表し、各軌跡上で座標による最大化を行う。

### 【解答】

(1)  $z = 0$  なら明らかである。 $z \neq 0$  のとき、 $O, A, B$  が一直線上にあることは  $z^2/z = z$  が実数であることと同値である。したがって必要十分条件は

$$z \text{ が実数であること}$$

である。

(2)  $z = x + yi$  とおく。3 辺の長さの 2 乗は

$$OA^2 = x^2 + y^2, \quad OB^2 = (x^2 + y^2)^2, \quad AB^2 = (x^2 + y^2)\{(x-1)^2 + y^2\}$$

である。三角形を作る場合は  $z \neq 0$  だから、二等辺条件は順に

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1, \quad x = \frac{1}{2}$$

となる。よって単位円、中心  $(1, 0)$ ・半径 1 の円、直線  $x = 1/2$  の和集合から、実軸上の退化する点を除いたものが答えである。

(3)  $0 \leq \theta \leq \pi/3$  では  $y \geq 0$  である。 $B = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$  だから、三角形の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2}\{2x^2y - y(x^2 - y^2)\} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)y.$$

単位円上では  $S = y/2 \leq \sqrt{3}/4$  である。直線  $x = 1/2$  上では  $0 < y \leq \sqrt{3}/2$  で、 $S = \frac{1}{2}(1/4 + y^2)y$  は増加するから最大は  $\sqrt{3}/4$  である。

残る円  $(x-1)^2 + y^2 = 1$  では  $x^2 + y^2 = 2x$  なので  $S = xy$  である。 $S^2 = x^2(2x - x^2) = x^3(2 - x)$  を微分すると

$$\frac{d}{dx}\{x^3(2-x)\} = 2x^2(3-2x)$$

であり、最大は  $x = 3/2$  のときである。このとき  $y = \sqrt{3}/2$  だから

$$S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 26 分程度。複素数平面上の 3 点を、三辺の長さや偏角で整理する問題である。二等辺条件は 3 通りの辺の等式に必ず分ける必要があり、得られる軌跡も円 2 つと直線 1 つに分かれる。面積最大では各軌跡ごとに  $r$  と  $\theta$  の関係を代入して比較する。実軸上では三角形がつぶれるため、図示ではその除外も忘れない。極形式と直交座標の 2 法で最大点を照合し、3 種類の軌跡すべてで候補値を比較した。

【第 6 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数  $a$  と正の整数  $n$  に対して次の等式が成り立つことを示せ。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

- (2) 正の実数  $a$  と正の整数  $n$  に対して次の不等式を示せ。

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

- (3) 不等式

$$\left| e - \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) \right| < 10^{-3}$$

を満たす最小の正の整数  $n$  を求めよ。必要ならば  $2 < e < 3$  であることは証明なしに用いてもよい。

【方針】

- (1) は余り積分

$$I_n = \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

を置き、部分積分により  $I_n = a^{n+1}/(n+1)! + I_{n+1}$  となることを示して帰納法で進める。(2) は  $0 \leq x \leq a$  で  $1 \leq e^x \leq e^a$  を用いて積分全体をはさむ。(3) は  $a = 1$  として誤差を余り積分で評価し、上限で  $n = 6$  が十分、下限で  $n = 5$  が不十分であることを確認する。

【解答】

- (1)

$$I_n = \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx$$

とおく。まず  $n = 1$  のとき、部分積分により

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^a (a-x)e^x dx \\ &= [(a-x)e^x]_0^a + \int_0^a e^x dx \\ &= -a + (e^a - 1) = e^a - 1 - a \end{aligned}$$

である。したがって  $e^a = 1 + a + I_1$  となり、主張は成り立つ。

次に、ある  $n$  で  $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$  が成り立つと仮定する。 $I_n$  を部分積分すると

$$\begin{aligned} I_n &= \left[ \frac{(a-x)^n}{n!} e^x \right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-x)^{n-1}}{(n-1)!} e^x dx \\ &= -\frac{a^n}{n!} + I_{n-1} \end{aligned}$$

である。これを 1 段先の形で書けば  $I_n = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$  である。実際、この等式は  $I_{n+1}$  を部分積分することで得られる。

したがって仮定式に代入すると

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$$

となり、 $n+1$  でも成り立つ。よって数学的帰納法により、すべての正の整数  $n$  で与えられた等式が成り立つ。

- (2)  $0 \leq x \leq a$  では  $1 \leq e^x \leq e^a$  である。また  $(a-x)^n/n! \geq 0$  なので、両辺に掛けて積分すると

$$\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} dx \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq e^a \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} dx$$

である。ここで

$$\int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} dx = \frac{1}{n!} \left[ -\frac{(a-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$$

である。よって

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_0^a \frac{(a-x)^n}{n!} e^x dx \leq \frac{e^a a^{n+1}}{(n+1)!}$$

が成り立つ。

(3)

(1) を  $a = 1$  に適用すると

$$e - \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$$

である。この右辺は正なので、絶対値はそのまま外せる。(2) より  $\frac{1}{(n+1)!} \leq \text{誤差} \leq \frac{e}{(n+1)!}$  である。 $n = 5$  のとき、下限から 誤差  $\geq \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} > 10^{-3}$  なので条件を満たさない。

一方  $n = 6$  のとき、 $e < 3$  を用いると 誤差  $\leq \frac{e}{7!} < \frac{3}{5040} < 10^{-3}$  である。したがって条件を満たす最小の正の整数は 6 である。

**【総評】** 難度 7、計算量 6。想定時間は 24 分程度。指数関数の近似を積分の余りで評価する問題である。(1) は部分積分を一度書くだけでなく、余りが次の項と次の余りに分かれる構造を明示することが重要である。(3) では上からの評価だけだと最小性が示せないため、下限で  $n = 5$  を除外する確認が必要になる。大学範囲の展開名を使わず、積分と不等式で完結させるのがよい。