

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2022 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

K を 3 より大きな奇数とし、 $l + m + n = K$ を満たす正の奇数の組 (l, m, n) の個数 N を考える。ただし、たとえば、 $K = 5$ のとき、 $(l, m, n) = (1, 1, 3)$ と $(l, m, n) = (1, 3, 1)$ とは異なる組とみなす。

- (1) $K = 99$ のとき、 N を求めよ。
- (2) $K = 99$ のとき、 l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 (l, m, n) の個数を求めよ。
- (3) $N > K$ を満たす最小の K を求めよ。

第 2 問

a を実数とし、実数 x の関数 $f(x) = (x^2 + 3x + a)(x + 1)^2$ を考える。

- (1) $f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $a < 2$ のとき、 $f(x)$ は 2 つの極小値をもつ。このとき、 $f(x)$ が極小となる x の値を α_1, α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) とする。 $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ を示せ。
- (3) $f(x)$ が $x < \beta$ において単調減少し、かつ、 $x = \beta$ において最小値をとるとする。このとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

第 3 問

正の整数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$$

とする。

(1) 正の実数 x に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

第 4 問

xy 平面の第 1 象限内において、直線 $l: y = mx$ ($m > 0$) と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし、円 C の中心を通る直線 $y = tx$ ($t > 0$) を考える。また、直線 l と x 軸、および、円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし、 $b > a$ とする。

- (1) m を用いて t を表せ。
- (2) t を用いて $\frac{b}{a}$ を表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$ を求めよ。

第 5 問

座標空間内において、ベクトル

$$\vec{a} = (1, 2, 1), \quad \vec{b} = (1, 1, -1), \quad \vec{c} = (0, 0, 1)$$

が定める 2 直線

$$l: s\vec{a}, \quad l': t\vec{b} + \vec{c} \quad (s, t \text{ は実数})$$

を考える。点 A_1 を原点 $(0, 0, 0)$ とし、点 A_1 から直線 l' に下ろした垂線を A_1B_1 とおく。次に、点 $B_1(t_1\vec{b} + \vec{c})$ から直線 l に下ろした垂線を B_1A_2 とおく。同様に、点 $A_k(s_k\vec{a})$ から直線 l' に下ろした垂線を A_kB_k 、点 $B_k(t_k\vec{b} + \vec{c})$ から直線 l に下ろした垂線を B_kA_{k+1} とする手順を繰り返して、点 $A_n(s_n\vec{a})$ 、 $B_n(t_n\vec{b} + \vec{c})$ (n は正の整数) を定める。

- (1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ。
- (2) 極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた S, T に対して、点 A, B をそれぞれ $A(S\vec{a})$, $B(T\vec{b} + \vec{c})$ とおくと、直線 AB は 2 直線 l, l' の両方と直交することを示せ。

第 6 問

半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と、半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき、直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)