

東北大学 2022 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

K を 3 より大きな奇数とし、 $l + m + n = K$ を満たす正の奇数の組 (l, m, n) の個数 N を考える。ただし、たとえば、 $K = 5$ のとき、 $(l, m, n) = (1, 1, 3)$ と $(l, m, n) = (1, 3, 1)$ とは異なる組とみなす。

- (1) $K = 99$ のとき、 N を求めよ。
- (2) $K = 99$ のとき、 l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 (l, m, n) の個数を求めよ。
- (3) $N > K$ を満たす最小の K を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

正の奇数を $l = 2x - 1, m = 2y - 1, n = 2z - 1$ とおき、正の整数 x, y, z の和の問題へ変換する。 $K = 99$ では $x + y + z = 51$ なので、(1) は仕切りの入れ方で数える。(2) は「同じ奇数を 2 つ以上含む」を $x = y, y = z, z = x$ の和集合として包除で数える。(3) は一般の K について $M = \frac{K+3}{2}$ とおき、 $N = \frac{(M-1)(M-2)}{2}$ と $K = 2M - 3$ を比較する。

【解答】

(1) l, m, n は正の奇数なので $l = 2x - 1, m = 2y - 1, n = 2z - 1$ とおける。ただし x, y, z は正の整数である。 $K = 99$ のとき $(2x - 1) + (2y - 1) + (2z - 1) = 99$ より $x + y + z = 51$ となる。

正の整数 x, y, z で $x + y + z = 51$ をみたすものの個数は、51 個を 3 つの正の部分に分ける仕切りの入れ方なので ${}_{50}C_2 = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$ である。したがって $N = 1225$ である。

(2) l, m, n の中に同じ奇数を 2 つ以上含むことは、 x, y, z の中に同じ整数を 2 つ以上含むことと同値である。

まず $x = y$ の場合を数える。このとき $2x + z = 51$ であり、 $z = 51 - 2x$ が正の整数となるには $x = 1, 2, \dots, 25$ であればよい。よって 25 通りである。同様に、 $y = z, z = x$ の場合もそれぞれ 25 通りである。

ただし、 $x = y = z$ の場合は 3 つの集合すべてに含まれる。 $x + y + z = 51$ より $x = y = z = 17$ の 1 通りである。したがって包除原理により、少なくとも 2 つが等しいものの個数は $25 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 1 = 73$ である。

(3) 一般の K について $M = \frac{K+3}{2}$ とおく。 K は 3 より大きい奇数なので、 M は 4 以上の整数であり、 $x + y + z = M$ となる。よって $N = {}_{M-1}C_2 = \frac{(M-1)(M-2)}{2}$ である。また $K = 2M - 3$ である。

条件 $N > K$ は $\frac{(M-1)(M-2)}{2} > 2M - 3$ であり、整理すると $M^2 - 7M + 8 > 0$ となる。 $M \geq 4$ で順に調べると、 $M = 4, 5$ では成り立たず、 $M = 6$ では $36 - 42 + 8 = 2 > 0$ となって初めて成り立つ。したがって最小の M は 6 であり、 $K = 2M - 3 = 9$ である。

▶ 解法 2

【方針】

正の奇数を直接 $l = 2a + 1$ 、 $m = 2b + 1$ 、 $n = 2c + 1$ と表し、非負整数の和として数える。(2) は重なる値を先に決め、3 数がすべて等しい場合だけ並べ方が 1 通りになることを分離する。(3) は $N = (K^2 - 1)/8$ を直接 K と比較する。

【解答】

(1) 正の奇数を

$$l = 2a + 1, \quad m = 2b + 1, \quad n = 2c + 1$$

と表す。ただし a, b, c は非負整数である。 $K = 99$ のとき

$$a + b + c = \frac{99 - 3}{2} = 48$$

だから、仕切りを 2 本入れる数え方により

$$N = {}_{50}C_2 = 1225$$

である。

(2) たとえば $l = m = r$ とすると、残りは $n = 99 - 2r$ である。これが正の奇数となるのは

$$r = 1, 3, \dots, 49$$

の 25 通りである。このうち $r = 33$ のときだけ $n = r$ となり、3 数がすべて等しい。

$r \neq 33$ の 24 通りでは、異なる 1 数を置く位置が 3 通りある。一方、 $(33, 33, 33)$ は 1 通りだけである。したがって

$$24 \cdot 3 + 1 = 73$$

通りである。この数え方なら、全要素が等しい組を 3 回数える重複を初めから避けられる。

(3) 一般の奇数 $K > 3$ に対し

$$a + b + c = \frac{K - 3}{2}$$

であるから

$$N = {}_{(K+1)/2}C_2 = \frac{K^2 - 1}{8}.$$

よって

$$N > K \iff K^2 - 8K - 1 > 0.$$

左辺は $K \geq 4$ で単調に増加し、 $K = 7$ では $-8 < 0$ 、 $K = 9$ では $8 > 0$ である。したがって条件を満たす最小の奇数は

$$K = 9$$

である。

【総評】 奇数条件を非負整数または正整数の和へ直し、順序つきの組を数える問題。目安時間は 16～20 分。公式講評でも、(2) の重複処理、(3) の一般化、順列として数えること、結論までの論述が重点とされている。包除原理なら全要素が等しい 1 組を補正し、直接分類なら『異なる 1 数の位置が 3 通り』と明記する。小さい値からの類推だけでは一般の場合の証明にならないため、最終的に $N = (K^2 - 1)/8$ を導くところまで書き切りたい。

【第 2 問】

a を実数とし、実数 x の関数 $f(x) = (x^2 + 3x + a)(x + 1)^2$ を考える。

- (1) $f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $a < 2$ のとき、 $f(x)$ は 2 つの極小値をもつ。このとき、 $f(x)$ が極小となる x の値を α_1, α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$) とする。
 $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ を示せ。
- (3) $f(x)$ が $x < \beta$ において単調減少し、かつ、 $x = \beta$ において最小値をとるとする。このとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$y = x + 1$ とおくと $f = y^2(y^2 + y + a - 2)$ となり、重因子 y^2 と 2 次式の関係が見えやすくなる。(1) は $y^2 \geq 0$ なので、2 次式 $y^2 + y + a - 2$ が負になるかで判定する。(2) は導関数 $y(4y^2 + 3y + 2a - 4)$ の 2 つの極小点を調べ、極小点での値を根の関係で比較する。(3) は導関数の符号配置と全体最小の位置を、 $a \leq \frac{9}{4}$ 、 $\frac{9}{4} < a < \frac{73}{32}$ 、 $a \geq \frac{73}{32}$ に分けて判定する。

【解答】

$y = x + 1$ とおく。 x が実数全体を動くとき、 y も実数全体を動く。また $x^2 + 3x + a = (y - 1)^2 + 3(y - 1) + a = y^2 + y + a - 2$ であり、 $(x + 1)^2 = y^2$ だから $f(x) = y^2(y^2 + y + a - 2)$ である。以下、 f を y の関数として扱う。

(1) $y^2 \geq 0$ であり、 $y = 0$ では $f = 0$ である。したがって f が負の値をとるためには、ある $y \neq 0$ で $y^2 + y + a - 2 < 0$ となればよい。

2 次式 $y^2 + y + a - 2$ の最小値は、 $y = -\frac{1}{2}$ のとき $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + a - 2 = a - \frac{9}{4}$ である。よって負の値をとる y が存在する条件は $a - \frac{9}{4} < 0$ である。したがって求める範囲は $a < \frac{9}{4}$ である。

(2) 微分すると $\frac{df}{dy} = 2y(y^2 + y + a - 2) + y^2(2y + 1) = y(4y^2 + 3y + 2a - 4)$ である。 $a < 2$ のとき、2 次方程式 $4y^2 + 3y + 2a - 4 = 0$ は積が $\frac{2a - 4}{4} < 0$ であるから、負の解と正の解を 1 つずつもつ。それらを $y_1 < 0 < y_2$ とする。導関数の符号を調べると、 $y = y_1$ と $y = y_2$ で極小となり、 $y = 0$ で極大となる。 $x = y - 1$ であるから、 $\alpha_1 = y_1 - 1$ 、 $\alpha_2 = y_2 - 1$ である。

極小点 $y = y_1, y_2$ では $4y^2 + 3y + 2a - 4 = 0$ が成り立つ。これより $a - 2 = -2y^2 - \frac{3}{2}y$ であるから $y^2 + y + a - 2 = -y^2 - \frac{1}{2}y$ となる。したがって極小値は $f = y^2(-y^2 - \frac{1}{2}y) = -y^3(y + \frac{1}{2})$ で表される。

また、2 次方程式の解と係数の関係より $y_1 + y_2 = -\frac{3}{4}$ である。 $y_1 = -\frac{3}{4} - y_2$ を用いて整理すると $f(y_2) - f(y_1) = \frac{(8y_2 + 3)^3}{256}$ である。 $y_2 > 0$ なので右辺は正である。よって $f(y_1) < f(y_2)$ であり、すなわち $f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$ である。

(3) $f'(y) = y(4y^2 + 3y + 2a - 4)$ の符号で考える。まず $a \leq \frac{9}{4}$ のとき、(1) より f は負の値をとるか、または $a = \frac{9}{4}$ で最小値 0 をとる。左側の極小点で全体の最小値をとり、その点より左では導関数が負である。したがって、ある β をその最小点に対応する x とすれば、 $x < \beta$ で f は単調減少し、 $x = \beta$ で最小値をとる。

次に $\frac{9}{4} < a < \frac{73}{32}$ とする。このとき $y^2 + y + a - 2 > 0$ がすべての y で成り立つので、 $f \geq 0$ であり、全体の最小値は $y = 0$ 、すなわち $x = -1$ でとる。一方、 $4y^2 + 3y + 2a - 4 = 0$ は 2 つの負の解をもつので、 $y < 0$ の範囲で $f'(y)$ は途中で正になる区間をもつ。したがって $x < -1$ 全体で単調減少とはならず、この範囲の a は条件を満たさない。

最後に $a \geq \frac{73}{32}$ とする。このとき $4y^2 + 3y + 2a - 4$ の判別式は $9 - 16(2a - 4) = 73 - 32a \leq 0$ であり、 y の 2 次式として常に 0 以上である。したがって $y < 0$ では $f'(y) \leq 0$ 、 $y > 0$ では $f'(y) \geq 0$ である。よって $y = 0$ 、すなわち $x = -1$ で全体の最小値をとり、かつその左側で単調減少する。

以上より、求める a の範囲は $a \leq \frac{9}{4}$ または $a \geq \frac{73}{32}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

$y = x + 1$ として導関数を $f'(y) = yQ(y)$ と因数分解する。(2) は Q の 2 根の中点を原点に移し、極小値の差を定積分で比較する。(3) は $a > 9/4$ のとき最小点が $y = 0$ に限られることを使い、 $y < 0$ での単調減少条件を Q の頂点の値だけで判定する。

【解答】

$y = x + 1$ とおくと

$$f(y) = y^2(y^2 + y + a - 2), \quad f'(y) = yQ(y), \quad Q(y) = 4y^2 + 3y + 2a - 4.$$

(1) $y^2 \geq 0$ なので、 f が負の値をもつための必要十分条件は、2 次式 $y^2 + y + a - 2$ が負の値をもつことである。その最小値は

$$a - \frac{9}{4}$$

だから

$$a < \frac{9}{4}$$

である。ここでは微分は不要である。

(2) $a < 2$ では $Q(y) = 0$ の 2 根を $y_1 < 0 < y_2$ と書ける。これらが 2 つの極小点に対応する。根の中点と半幅を

$$c = -\frac{3}{8}, \quad d = \frac{\sqrt{73 - 32a}}{8}$$

とおけば $y_1 = c - d, y_2 = c + d$ である。また

$$f'(y) = 4y(y - y_1)(y - y_2).$$

そこで $y = c + u$ と置くと

$$\begin{aligned} f(y_2) - f(y_1) &= 4 \int_{-d}^d (c + u)(u^2 - d^2) du \\ &= 4c \int_{-d}^d (u^2 - d^2) du = -\frac{16cd^3}{3} = 2d^3 > 0. \end{aligned}$$

奇関数部分の積分は 0 である。したがって

$$f(\alpha_1) = f(y_1) < f(y_2) = f(\alpha_2).$$

(3) まず $a < 2$ では (2) より負側の極小値が正側の極小値より小さく、 $y = 0$ での値は 0 だから、最初の極小点が全体最小点である。 $2 \leq a < 9/4$ では $Q(y) = 0$ の 2 根はともに負であり、最初の根で負の極小値をとる一方、 $y = 0$ での値は 0 である。いずれも f は $-\infty$ からその最小点まで単調減少する。

$a = 9/4$ では

$$f(y) = y^2 \left(y + \frac{1}{2} \right)^2$$

であり、 $y = -1/2$ を選べば、その左側で単調減少し最小値 0 をとる。よって $a \leq 9/4$ はすべて適する。

次に $a > 9/4$ では $f(y) \geq 0$ で、最小値 0 をとる点は $y = 0$ だけである。したがって β は $x = -1$ に対応し、必要十分条件は $y < 0$ で $f'(y) \leq 0$ 、すなわち $Q(y) \geq 0$ である。 Q の頂点 $y = -3/8$ は負であり

$$Q\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{32a - 73}{16}.$$

ゆえに条件は $a \geq 73/32$ である。以上より

$$a \leq \frac{9}{4} \quad \text{または} \quad a \geq \frac{73}{32}$$

となる。

【総評】 4 次関数の増減とパラメータを同時に扱う難問。目安時間は 30～38 分。公式講評では、(1) に不要な微分を持ち込む時間損失、(2) の計算を示さない結論、(3) の増減場合分け不足が指摘されている。 $y = x + 1$ により重因子を原点へ移し、 $f' = yQ(y)$ と整理するのが全問共通の軸である。境界 $9/4$ は関数値の符号、 $73/32$ は導関数中の 2 次式の頂点から生じるため、役割を混同しない。

【第 3 問】

正の整数 n に対して、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$$

とする。

(1) 正の実数 x に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $\sqrt{1+x}-1$ を有理化し、分母 $\sqrt{1+x}+1$ を上下から評価する。(2) は $x = \frac{k}{n^2}$ を代入して各項をはさみ、 $1 \leq k \leq n$ から下限の分母を $2n^2 + n$ でそろえる。上下の和がどちらも $\frac{1}{4}$ に近づくことを確認して、はさみうちを使う。

【解答】

(1) $x > 0$ とする。有理化すると $\sqrt{1+x}-1 = \frac{x}{\sqrt{1+x}+1}$ である。

まず $\sqrt{1+x}+1 \geq 2$ だから $\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} \leq \frac{x}{2}$ である。よって $\sqrt{1+x}-1 \leq \frac{x}{2}$ が成り立つ。

また、 $x > 0$ では $1+x \geq \sqrt{1+x}$ である。したがって $\sqrt{1+x}+1 \leq x+2$ となる。分子 x は正なので、分母が大きいほど分数は小さくなる。よって $\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} \geq \frac{x}{x+2}$ である。したがって $\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x}-1 \leq \frac{x}{2}$ が示された。

(2) (1) に $x = \frac{k}{n^2}$ を代入すると

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2 + \frac{k}{n^2}} \leq \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \leq \frac{k}{2n^2}$$

である。左辺を整理して $\frac{k}{2n^2 + k} \leq \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \leq \frac{k}{2n^2}$ を得る。 $1 \leq k \leq n$ より $2n^2 + k \leq 2n^2 + n$ であるから

$\frac{k}{2n^2 + k} \geq \frac{k}{2n^2 + n}$ である。したがって $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2 + n} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2}$ となる。

各和を計算すると

$$\frac{1}{2n^2 + n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \leq S_n \leq \frac{1}{2n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

すなわち $\frac{n(n+1)}{2(2n^2 + n)} \leq S_n \leq \frac{n(n+1)}{4n^2}$ である。左右の端はどちらも $\frac{1}{4}$ に収束する。よって、はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

各項を一次近似 $k/(2n^2)$ と比較し、その誤差を二次の量で一括評価する。(1) の上側評価から、平方根の差と一次項との差が $x^2/8$ 以下であることを示し、誤差の総和が 0 へ収束することから極限を得る。

【解答】

(1) $u = \sqrt{1+x} - 1 > 0$ とおくと $x = u(u+2)$ である。すると

$$\frac{x}{2} - u = \frac{u(u+2)}{2} - u = \frac{u^2}{2} \geq 0$$

だから $u \leq x/2$ である。また

$$u = \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$$

であり、 $\sqrt{1+x} \leq 1+x$ より分母は $2+x$ 以下だから

$$u \geq \frac{x}{2+x}.$$

したがって所要の不等式が成り立つ。

(2) 上の計算はさらに

$$0 \leq \frac{x}{2} - (\sqrt{1+x} - 1) = \frac{(\sqrt{1+x} - 1)^2}{2} \leq \frac{x^2}{8}$$

を与える。ここで $x = k/n^2$ として $k = 1, \dots, n$ について足すと

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} - S_n \leq \frac{1}{8n^4} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{48n^4}.$$

右端は 0 へ収束する。一方

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} = \frac{n(n+1)}{4n^2} \rightarrow \frac{1}{4}.$$

よって誤差評価から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$$

である。

【総評】 平方根の差を評価し、和の極限をはさみうちで求める標準問題。目安時間は 14～18 分。公式講評では、2 乗時の符号条件、平均値の定理などを使う際の論理不足、グラフだけの説明、(2) の下からの評価不足が指摘されている。有理化なら全量が正であることが明確で安全である。別解の誤差評価は各項のずれを $O(k^2/n^4)$ に抑え、総誤差まで具体的に 0 へ送る。

【第 4 問】

xy 平面の第 1 象限内において、直線 $l: y = mx$ ($m > 0$) と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし、円 C の中心を通る直線 $y = tx$ ($t > 0$) を考える。また、直線 l と x 軸、および、円 C のすべてにそれぞれ 1 点で接する円の半径を b とする。ただし、 $b > a$ とする。

- (1) m を用いて t を表せ。
- (2) t を用いて $\frac{b}{a}$ を表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

直線 $y = mx$ と x 軸のなす角を ϕ とおくと、両方に接する円の中心は角の二等分線上にあるので、中心を通る直線の傾きは $t = \tan \frac{\phi}{2}$ である。(2) では半径 a, b の 2 つの円の中心を $(a/t, a)$ 、 $(b/t, b)$ と表し、2 円が外接するため中心間距離が $a + b$ になる条件から b/a を求める。(3) は $m \rightarrow +0$ で $t/m \rightarrow \frac{1}{2}$ と、 $b/a - 1$ の t に関する一次の変化を組み合わせる。

【解答】

(1) 直線 $l: y = mx$ と x 軸のなす角を ϕ とおく。 $m > 0$ なので $m = \tan \phi$ である。円 C は直線 l と x 軸の両方に接しているため、その中心は 2 直線のなす角の二等分線上にある。したがって、中心を通る直線 $y = tx$ は $t = \tan \frac{\phi}{2}$ を満たす。

半角公式より $\tan \frac{\phi}{2} = \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi}$ である。 $\tan \phi = m$ から $\sin \phi = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$, $\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ だから $t = \frac{m}{1 + \sqrt{1+m^2}}$ である。

(2) 半径 a の円の中心は、 x 軸からの距離が a であり、直線 $y = tx$ 上にある。よってその中心は $\left(\frac{a}{t}, a \right)$ である。同様に、半径 b の円の中心は $\left(\frac{b}{t}, b \right)$ である。

2 つの円は互いに外接し、 $b > a$ なので、中心間距離は $a + b$ である。したがって $\sqrt{\left(\frac{b-a}{t} \right)^2 + (b-a)^2} = a + b$ となる。
 $t > 0$ より $(b-a) \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = a + b$ である。 $\lambda = \frac{b}{a}$ とおくと $(\lambda-1) \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} = \lambda + 1$ である。これを解くと $\lambda = \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{1+t^2} - t}$ となる。分子分母に $\sqrt{1+t^2} + t$ をかければ $\frac{b}{a} = (\sqrt{1+t^2} + t)^2$ である。

(3) (1) より $t = \frac{m}{1 + \sqrt{1+m^2}}$ なので $\lim_{m \rightarrow +0} \frac{t}{m} = \frac{1}{2}$ である。

また (2) より $\frac{b}{a} = (\sqrt{1+t^2} + t)^2 = 1 + 2t\sqrt{1+t^2} + 2t^2$ である。したがって $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{b}{a} - 1}{t} = 2$ となる。よって

$$\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) = \left(\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{b}{a} - 1}{t} \right) \left(\lim_{m \rightarrow +0} \frac{t}{m} \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

角の二等分線と相似比を中心に処理する。半径 r の接円中心までの距離を $r/\sin(\phi/2)$ と表し、隣り合う 2 円の外接条件から半径比を直接求める。最後は $t = \tan(\phi/2)$ を用いて極限を 2 因子へ分ける。

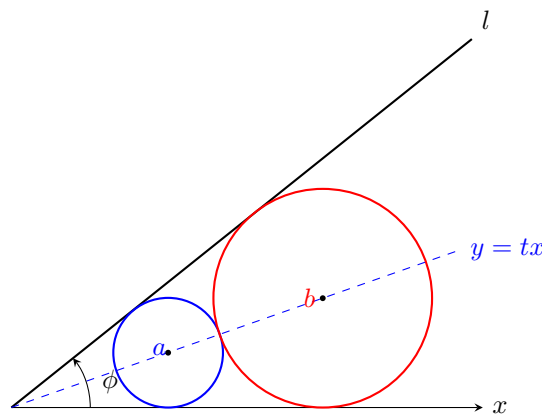
【解答】

(1) x 軸と l のなす角を ϕ ($0 < \phi < \pi/2$) とする。接円の中心は内角の二等分線上にあるから

$$t = \tan \frac{\phi}{2}.$$

$m = \tan \phi$ と半角公式より

$$t = \frac{m}{1 + \sqrt{1 + m^2}}.$$



(2) 角の頂点から半径 r の接円中心までの距離は

$$d_r = \frac{r}{\sin(\phi/2)}$$

である。2 円は同じ二等分線上で外接し、 $b > a$ だから

$$d_b - d_a = a + b.$$

$s = \sin(\phi/2)$ とおけば

$$\frac{b-a}{s} = a+b \implies \frac{b}{a} = \frac{1+s}{1-s}.$$

また $t = \tan(\phi/2)$ より $s = t/\sqrt{1+t^2}$ である。したがって

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}-t} = (\sqrt{1+t^2}+t)^2.$$

(3)

$$\frac{\frac{b}{a}-1}{m} = \frac{\frac{b}{a}-1}{t} \cdot \frac{t}{m}.$$

(1) より $t/m \rightarrow 1/2$ であり、(2) より

$$\frac{\frac{b}{a}-1}{t} = 2\sqrt{1+t^2} + 2t \rightarrow 2.$$

よって

$$\lim_{m \rightarrow +0} \frac{1}{m} \left(\frac{b}{a} - 1 \right) = 1.$$

【総評】 2 直線への接円、相似、極限をつなぐ図形問題。目安時間は 22～28 分。公式講評では、『関係式』で止めて指定変数で陽に表さない答案、複号を選ばない答案、 $m \rightarrow +0$ での t の誤評価が指摘されている。中心が内角の二等分線上にあることと $b > a$ を図で固定し、正の枝だけを選ぶ。(3) は $t/m \rightarrow 1/2$ と $(b/a - 1)/t \rightarrow 2$ を分離すると検算しやすい。

【第 5 問】

座標空間内において、ベクトル

$$\vec{a} = (1, 2, 1), \quad \vec{b} = (1, 1, -1), \quad \vec{c} = (0, 0, 1)$$

が定める 2 直線

$$l: s\vec{a}, \quad l': t\vec{b} + \vec{c} \quad (s, t \text{ は実数})$$

を考える。点 A_1 を原点 $(0, 0, 0)$ とし、点 A_1 から直線 l' に下ろした垂線を A_1B_1 とおく。次に、点 $B_1(t_1\vec{b} + \vec{c})$ から直線 l に下ろした垂線を B_1A_2 とおく。同様に、点 $A_k(s_k\vec{a})$ から直線 l' に下ろした垂線を A_kB_k 、点 $B_k(t_k\vec{b} + \vec{c})$ から直線 l に下ろした垂線を B_kA_{k+1} とする手順を繰り返して、点 $A_n(s_n\vec{a})$ 、 $B_n(t_n\vec{b} + \vec{c})$ (n は正の整数) を定める。

- (1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ。
- (2) 極限值 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた S, T に対して、点 A, B をそれぞれ $A(S\vec{a})$, $B(T\vec{b} + \vec{c})$ とおくと、直線 AB は 2 直線 l, l' の両方と直交することを示せ。

▶ 解法 1

【方針】

各垂線条件を、対応する直線の方向ベクトルとの内積が 0 である条件として書く。 $A_n = s_n\vec{a}$ から l' への垂線で t_n を s_n で表し、 $B_n = t_n\vec{b} + \vec{c}$ から l への垂線で s_{n+1} を t_n で表す。これにより s_n の 1 次漸化式を得る。極限は収束する 1 次漸化式の不動点として求め、最後に極限点を結ぶベクトルが両方向ベクトルに垂直であることを内積で確認する。

【解答】

まず必要な内積を計算しておく。 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2$,

$$|\vec{a}|^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6, \quad |\vec{b}|^2 = 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = 3,$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 1, \quad \vec{c} \cdot \vec{b} = -1$$

である。

- (1) $A_n = s_n\vec{a}$ 、 $B_n = t_n\vec{b} + \vec{c}$ である。 A_nB_n は直線 l' に垂直なので、 l' の方向ベクトル $\vec{b}$ と垂直である。したがって

$$(s_n\vec{a} - t_n\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$$

である。内積を代入すると $2s_n - 3t_n + 1 = 0$ なので $t_n = \frac{2s_n + 1}{3}$ である。

次に、 B_nA_{n+1} は直線 l に垂直なので、 l の方向ベクトル $\vec{a}$ と垂直である。したがって

$$(t_n\vec{b} + \vec{c} - s_{n+1}\vec{a}) \cdot \vec{a} = 0$$

である。内積を代入すると $2t_n + 1 - 6s_{n+1} = 0$ だから $s_{n+1} = \frac{2t_n + 1}{6}$ である。先ほどの t_n を代入して $s_{n+1} = \frac{2 \cdot \frac{2s_n + 1}{3} + 1}{6} = \frac{4s_n + 5}{18}$ を得る。

- (2) (1) より $s_{n+1} = \frac{2}{9}s_n + \frac{5}{18}$ である。係数 $\frac{2}{9}$ の絶対値は 1 より小さいので、 s_n は収束する。極限を S とすると $S = \frac{4S + 5}{18}$ である。したがって $18S = 4S + 5$ より $S = \frac{5}{14}$ である。

また $t_n = \frac{2s_n + 1}{3}$ なので、 t_n の極限 T は $T = \frac{2S + 1}{3} = \frac{2 \cdot \frac{5}{14} + 1}{3} = \frac{4}{7}$ である。

- (3)

$$\overrightarrow{AB} = T\vec{b} + \vec{c} - S\vec{a}$$

である。直線 AB が l と直交することを示すには、 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = 0$ を示せばよい。実際、

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = T(\vec{b} \cdot \vec{a}) + \vec{c} \cdot \vec{a} - S|\vec{a}|^2 = 2T + 1 - 6S$$

である。 $S = \frac{5}{14}$ 、 $T = \frac{4}{7}$ を代入すると $2T + 1 - 6S = \frac{8}{7} + 1 - \frac{30}{14} = \frac{8}{7} + 1 - \frac{15}{7} = 0$ である。

同様に、直線 AB が l' と直交することを示すには、 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{b} = 0$ を示せばよい。

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{b} = T|\vec{b}|^2 + \vec{c} \cdot \vec{b} - S(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3T - 1 - 2S$$

であり、 $3T - 1 - 2S = \frac{12}{7} - 1 - \frac{10}{14} = \frac{12}{7} - 1 - \frac{5}{7} = 0$ である。したがって直線 AB は 2 直線 l, l' の両方と直交する。

▶ 解法 2

【方針】

垂線の足を直交射影の公式として求める。(1) の漸化式を不動点との差へ直し、 s_n, t_n の一般項まで求めて収束を確認する。(3) は極限で残る 2 本の射影条件をそのまま内積 0 の式として用いる。

【解答】

必要な内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2, \quad |\mathbf{a}|^2 = 6, \quad |\mathbf{b}|^2 = 3, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 1, \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = -1$$

である。

(1) 点 $s_n \mathbf{a}$ を直線 $t\mathbf{b} + \mathbf{c}$ へ正射影するとき、その係数は

$$t_n = \frac{\mathbf{b} \cdot (s_n \mathbf{a} - \mathbf{c})}{|\mathbf{b}|^2} = \frac{2s_n + 1}{3}.$$

次に $t_n \mathbf{b} + \mathbf{c}$ を直線 $s\mathbf{a}$ へ正射影すると

$$s_{n+1} = \frac{\mathbf{a} \cdot (t_n \mathbf{b} + \mathbf{c})}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{2t_n + 1}{6} = \frac{4s_n + 5}{18}.$$

(2) 不動点は $5/14$ だから

$$s_{n+1} - \frac{5}{14} = \frac{2}{9} \left(s_n - \frac{5}{14} \right).$$

$s_1 = 0$ より

$$s_n = \frac{5}{14} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} \right\}.$$

さらに

$$t_n = \frac{2s_n + 1}{3} = \frac{4}{7} - \frac{5}{21} \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1}.$$

したがって

$$S = \frac{5}{14}, \quad T = \frac{4}{7}.$$

(3) 各段階の正射影条件は

$$(t_n \mathbf{b} + \mathbf{c} - s_n \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (t_n \mathbf{b} + \mathbf{c} - s_{n+1} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0.$$

一般項から両数列は収束するので、 $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$(T\mathbf{b} + \mathbf{c} - S\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (T\mathbf{b} + \mathbf{c} - S\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0.$$

左のベクトルは $\overrightarrow{AB}$ であるから、直線 AB は l, l' の両方に直交する。

【総評】 ねじれの位置にある 2 直線への交互射影が共通垂線へ収束することを示す問題。目安時間は 22～28 分。公式講評では、方向ベクトルと直線上の点の位置ベクトルの混同、不要に複雑なベクトルの選択、(3) で根拠なく内積を 0 とする答案が問題視されている。各垂線条件を対応する方向ベクトルとの内積 0 として書き、極限を取れる根拠として収束も先に示す。

【第 6 問】

半径 1 の円を底面とする高さが $\sqrt{3}$ の直円柱と、半径が r の球を考える。直円柱の底面の円の中心と球の中心が一致するとき、直円柱の内部と球の内部の共通部分の体積 $V(r)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

球の中心を原点、円柱を $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{3}$ と置く。高さ z で切った断面は、半径 1 の円板と半径 $\sqrt{r^2 - z^2}$ の円板の共通部分であり、小さい方の面積を積分する。球の断面半径が 1 になる高さ $z = \sqrt{r^2 - 1}$ 、球の上端 $z = r$ 、円柱の上端 $z = \sqrt{3}$ の位置関係から、 $r = 1, \sqrt{3}, 2$ を境に場合分けする。

【解答】

球の中心を原点、円柱の底面を $z = 0$ の平面上に置く。円柱は $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{3}$ であり、球は $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ である。

高さ z で水平に切ると、円柱の断面は半径 1 の円板であり、球の断面は $0 \leq z \leq r$ で半径 $\sqrt{r^2 - z^2}$ の円板である。したがって共通部分の断面積は、これら 2 つの円板の小さい方の面積になる。

(i) $0 < r \leq 1$ のとき、球の上半分は常に半径 1 の円柱の内側に入る。したがって共通部分は半径 r の球の上半球であり、 $V(r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$ である。

(ii) $1 < r \leq \sqrt{3}$ のとき、球は円柱の上端 $z = \sqrt{3}$ まで届かないか、ちょうど届く。球の断面半径が 1 になる高さは $\sqrt{r^2 - z^2} = 1$ より $z = \sqrt{r^2 - 1}$ である。したがって $0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - 1}$ では円柱の断面全体が入り、 $\sqrt{r^2 - 1} \leq z \leq r$ では球の断面が入る。よって

$$V(r) = \pi \sqrt{r^2 - 1} + \pi \int_{\sqrt{r^2 - 1}}^r (r^2 - z^2) dz$$

である。計算すると $V(r) = \frac{2\pi}{3} \left\{ r^3 - (r^2 - 1)^{3/2} \right\}$ である。

(iii) $\sqrt{3} < r < 2$ のとき、球は円柱の上端より高くまで伸びるが、円柱全体を含むほど大きくはない。したがって積分の上端は r ではなく、円柱の上端 $\sqrt{3}$ で止まる。 $0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - 1}$ では円柱の断面全体、 $\sqrt{r^2 - 1} \leq z \leq \sqrt{3}$ では球の断面が共通部分になるので

$$V(r) = \pi \sqrt{r^2 - 1} + \pi \int_{\sqrt{r^2 - 1}}^{\sqrt{3}} (r^2 - z^2) dz$$

である。これを整理して $V(r) = \pi \left\{ \sqrt{3}(r^2 - 1) - \frac{2}{3}(r^2 - 1)^{3/2} \right\}$ を得る。

(iv) $2 \leq r$ のとき、円柱内の点で球の中心から最も遠いものは、上面の円周上にあり、その距離は $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ である。したがって $r \geq 2$ なら円柱全体が球に含まれる。よって共通部分は円柱全体であり、 $V(r) = \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \pi\sqrt{3}$ である。

以上より

$$V(r) = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi r^3 & (0 < r \leq 1), \\ \frac{2\pi}{3} \left\{ r^3 - (r^2 - 1)^{3/2} \right\} & (1 < r \leq \sqrt{3}), \\ \pi \left\{ \sqrt{3}(r^2 - 1) - \frac{2}{3}(r^2 - 1)^{3/2} \right\} & (\sqrt{3} < r < 2), \\ \pi\sqrt{3} & (2 \leq r) \end{cases}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

円柱軸からの距離 ρ を固定した薄い円筒殻で積分する。共通部分の高さは $\min\{\sqrt{3}, \sqrt{r^2 - \rho^2}\}$ であり、積分範囲と高さの切替点を $r = 1, \sqrt{3}, 2$ ごとに決める。

【解答】

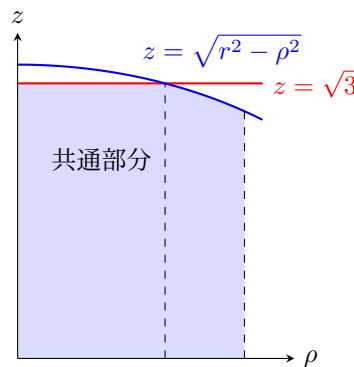
球の中心を原点、円柱を

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{3}$$

と置く。半径 ρ 、厚さ $d\rho$ の円筒殻の周は $2\pi\rho$ であり、球内での上向きの高さは $\sqrt{r^2 - \rho^2}$ である。したがって共通部分の高さは

$$h(\rho) = \min\{\sqrt{3}, \sqrt{r^2 - \rho^2}\}$$

となる。



(i) $0 < r \leq 1$ では $0 \leq \rho \leq r$ の球側の高さを積分して

$$V = 2\pi \int_0^r \rho \sqrt{r^2 - \rho^2} d\rho = \frac{2\pi}{3} r^3.$$

(ii) $1 < r \leq \sqrt{3}$ では $0 \leq \rho \leq 1$ で球側が上端となるから

$$V = 2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{r^2 - \rho^2} d\rho = \frac{2\pi}{3} \{r^3 - (r^2 - 1)^{3/2}\}.$$

(iii) $\sqrt{3} < r < 2$ では $\sqrt{r^2 - \rho^2} = \sqrt{3}$ となる $\rho = \sqrt{r^2 - 3}$ で高さが切り替わる。よって

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\sqrt{r^2-3}} \rho \sqrt{3} d\rho + 2\pi \int_{\sqrt{r^2-3}}^1 \rho \sqrt{r^2 - \rho^2} d\rho \\ &= \pi \left\{ \sqrt{3}(r^2 - 1) - \frac{2}{3}(r^2 - 1)^{3/2} \right\}. \end{aligned}$$

(iv) $r \geq 2$ では円柱上面の円周まで球内に入り、円柱全体が共通部分だから $V = \pi\sqrt{3}$ である。

以上より

$$V(r) = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi r^3 & (0 < r \leq 1), \\ \frac{2\pi}{3} \{r^3 - (r^2 - 1)^{3/2}\} & (1 < r \leq \sqrt{3}), \\ \pi \left\{ \sqrt{3}(r^2 - 1) - \frac{2}{3}(r^2 - 1)^{3/2} \right\} & (\sqrt{3} < r < 2), \\ \pi\sqrt{3} & (r \geq 2). \end{cases}$$

【総評】 円柱と球の位置関係を場合分けし、共通部分を積分する難問。目安時間は 30～36 分。公式講評では、円柱と半球の双方の一部だけが残る場合の見落とし、 r^3 と r^2 ・符号の計算ミス、円柱と円錐の混同が指摘されている。分岐点 $1, \sqrt{3}, 2$ がそれぞれ『球が側面へ届く』『上面へ届く』『上面円周まで含む』ことを図で説明する。水平断面法と円筒殻法が同じ区分式になること、および境界 3 点で式が連続することを検算する。