

入 学 試 験 問 題



数 学

東 北 大 学 2023 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

赤玉 4 個と白玉 5 個の入った、中の見えない袋がある。玉はすべて、色が区別できる他には違いはないものとする。A, B の 2 人が、A から交互に、袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし、その時点でゲームを終了する。B が白玉を取り出したら B の勝ちとし、その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし、ゲームを終了する。

- (1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。
- (2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ。

第 2 問

関数 $f(x) = \sin 3x + \sin x$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち、最小のものを求めよ。
- (2) 正の整数 m に対して、 $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち、 m 以下のものの個数を $p(m)$ とする。極限值 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p(m)}{m}$ を求めよ。

第 3 問

s を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = s, \quad (n+2)a_{n+1} = na_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) a_n を n と s を用いて表せ。

(2) ある正の整数 m に対して $\sum_{n=1}^m a_n = 0$ が成り立つとする。 s を m を用いて表せ。

第 4 問

実数 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ に対して，整式 $f(x) = x^2 - ax + 1$ を考える。

- (1) 整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ の虚数解であって虚部が正のものを α とする。 α を極形式で表せ。ただし， $r^5 = 1$ を満たす実数 r が $r = 1$ のみであることは，認めて使用してよい。
- (3) 設問 (2) の虚数 α に対して， $\alpha^{2023} + \alpha^{-2023}$ の値を求めよ。

第 5 問

四面体 $OABC$ において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおき、次が成り立つとする。

$$\angle AOB = 60^\circ, \quad |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |\vec{c}| = \sqrt{6}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$

ただし $\vec{b} \cdot \vec{c}$ は、2つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を表す。さらに、線分 OC と線分 AB は垂直であるとする。点 C から3点 O, A, B を含む平面に下ろした垂線を CH とし、点 O から3点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線を OK とする。

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (3) ベクトル $\vec{c}$ とベクトル $\overrightarrow{HK}$ は平行であることを示せ。

第 6 問

関数 $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{6x+1}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の接線で、傾きが 1 であり、かつ接点の x 座標が正であるものの方程式を求めよ。
- (2) 座標平面上の 2 点 $P(x, f(x))$, $Q(x+1, f(x)+1)$ を考える。 x が $0 \leq x \leq 2$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形 S の概形を描け。また S の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)