

東北大学 2023 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

赤玉 4 個と白玉 5 個の入った、中の見えない袋がある。玉はすべて、色が区別できる他には違いはないものとする。A, B の 2 人が、A から交互に、袋から玉を 1 個ずつ取り出すゲームを行う。ただし取り出した玉は袋の中に戻さない。A が赤玉を取り出したら A の勝ちとし、その時点でゲームを終了する。B が白玉を取り出したら B の勝ちとし、その時点でゲームを終了する。袋から玉がなくなったら引き分けとし、ゲームを終了する。

- (1) このゲームが引き分けとなる確率を求めよ。
- (2) このゲームに A が勝つ確率を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

9 個の玉を取り出す色順だけを考えると、赤 4 個の位置を選ぶ ${}_9C_4$ 通りが同様に確からしい。引き分けは、A の手番すべてが白、B の手番すべてが赤という 1 通りだけである。A 勝利は、A の i 回目の手番で初めて赤を引く場合に分ける。その前には A が白を $i-1$ 回、B が赤を $i-1$ 回引いている必要があり、残りの色順は自由に数えられる。別解では、実際の逐次確率を掛けて同じ値を確認する。

【解答】

(1) 玉は同じ色の中では区別しないので、9 回すべて取り出すときの色の並びを考える。赤玉 4 個の位置を選べば色順は決まるから、可能な色順は ${}_9C_4 = 126$ 通りであり、これらは同様に確からしい。

引き分けになるには、A が赤を取らず、B が白を取らないまま袋が空になる必要がある。A の手番は 1, 3, 5, 7, 9 番目、B の手番は 2, 4, 6, 8 番目であるから、引き分けの色順は $W, R, W, R, W, R, W, R, W$ の 1 通りだけである。したがって引き分けとなる確率は $\frac{1}{126}$ である。

(2) A が i 回目の手番で勝つ場合を数える。A は最大 5 回手番をもつが、5 回目までに B が 4 回赤を取っていると赤玉は残らないので、A が勝てるのは $i = 1, 2, 3, 4$ の場合だけである。

A が i 回目の手番で勝つには、それ以前の $i-1$ 回の A の手番は白、 $i-1$ 回の B の手番は赤であり、A の i 回目が赤でなければならない。この時点までに赤は i 個、白は $i-1$ 個使われている。残りの $10-2i$ 個の位置には赤が $4-i$ 個入ればよいから、その数は ${}_{10-2i}C_{4-i}$ である。

したがって A が勝つ色順の数は

$${}_8C_3 + {}_6C_2 + {}_4C_1 + {}_2C_0 = 56 + 15 + 4 + 1 = 76$$

である。よって A が勝つ確率は $\frac{76}{126} = \frac{38}{63}$ である。

▶ 別解 (ゲーム終了までの条件付き確率を足す)

【方針】

引き分けは唯一の色順を順に引く確率として求める。A の勝ちとは第 1 回から第 4 回の A の手番で初めて赤を引く互いに排反な場合へ分ける。

【解答】

(1) 引き分けになるには、A が毎回白、B が毎回赤を引き、最後に A が残った白を引かなければならない。したがって確率は

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5!4!}{9!} = \frac{1}{126}.$$

(2) A が第 1 回から第 4 回の自分の手番で初めて赤を引く確率を順に P_1, P_2, P_3, P_4 とする。これらは互いに排反であり、

$$P_1 = \frac{4}{9},$$

$$P_2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7},$$

$$P_3 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5},$$

$$P_4 = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}.$$

共通分母を 126 にすると

$$P_1 = \frac{56}{126}, \quad P_2 = \frac{15}{126}, \quad P_3 = \frac{4}{126}, \quad P_4 = \frac{1}{126}.$$

したがって

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{76}{126} = \frac{38}{63}.$$

【総評】 交互に玉を取り出す停止ゲームを、9 個の色順の数え上げに直す問題。目安時間は 15 分。A の勝利条件と B の勝利条件が非対称なので、「終了する前に何が起きていてはいけないか」を手番ごとに固定するのが重要である。引き分けは 1 通りしかないが、A 勝利は勝つ手番によって残りの自由度が変わる。逐次確率でも確認できるが、色順で数えると全体が ${}_9C_4$ 通りにそろう、計算が安定する。色順の等確率な数え上げと手番ごとの条件付き確率で、引き分け $1/126$ 、A の勝率 $38/63$ が一致した。

■ 【第 2 問】 ■

関数 $f(x) = \sin 3x + \sin x$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち、最小のものを求めよ。
 (2) 正の整数 m に対して、 $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x のうち、 m 以下のものの個数を $p(m)$ とする。極限值

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p(m)}{m} \text{ を求めよ。}$$

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

和積公式で $\sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$ と変形する。零点は $\sin 2x = 0$ または $\cos x = 0$ から得られ、どちらも正の零点全体としては $x = k\pi/2$ にまとまる。(2) は $k\pi/2 \leq m$ を満たす正整数 k の個数を数え、 $p(m)$ と $2m/\pi$ の差が 1 未満であることからさみうちで密度を求める。

【解答】

(1) 和積公式より $f(x) = \sin 3x + \sin x = 2 \sin 2x \cos x$ である。したがって $f(x) = 0$ となるのは $\sin 2x = 0$ または $\cos x = 0$ のときである。 $\sin 2x = 0$ からは $2x = k\pi$ すなわち $x = k\pi/2$ が得られる。また $\cos x = 0$ からは $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ が得られるが、これは $x = k\pi/2$ のうち奇数番目のものに含まれている。よって正の零点全体は $x = \frac{k\pi}{2}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) である。したがって最小のものは $\frac{\pi}{2}$ である。

(2) $f(x) = 0$ を満たす正の実数 x は $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$ である。したがって $p(m)$ は $\frac{k\pi}{2} \leq m$ を満たす正の整数 k の個数である。

この個数は $2m/\pi$ の整数部分であるから、床関数を使わずに書けば $p(m) \leq \frac{2m}{\pi} < p(m) + 1$ である。両辺を m で割ると $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m} < \frac{p(m)}{m} \leq \frac{2}{\pi}$ である。 $m \rightarrow \infty$ で左端と右端はともに $2/\pi$ に近づくので、はさみうちの原理により $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p(m)}{m} = \frac{2}{\pi}$ である。

▶ 別解 (3 倍角公式で零点を統合する)

【方針】

3 倍角公式を用いて $f(x)$ を $4 \sin x \cos^2 x$ と因数分解する。二種類の零点を一つの等間隔な列にまとめる。

【解答】

(1) 3 倍角公式

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

を用いると

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \sin x - 4 \sin^3 x \\ &= 4 \sin x (1 - \sin^2 x) = 4 \sin x \cos^2 x. \end{aligned}$$

したがって零点は

$$\sin x = 0 \quad \text{または} \quad \cos x = 0$$

である。正の零点を小さい順に並べると

$$\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$$

すなわち

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

である。よって最小のものは

$$\frac{\pi}{2}.$$

(2) $p(m)$ は

$$\frac{k\pi}{2} \leq m$$

を満たす正整数 k の個数である。したがって

$$\frac{2m}{\pi} - 1 < p(m) \leq \frac{2m}{\pi}.$$

$m > 0$ で割ると

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{m} < \frac{p(m)}{m} \leq \frac{2}{\pi}.$$

はさみうちの原理により

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{p(m)}{m} = \frac{2}{\pi}.$$

【総評】 三角関数の零点を数える短い問題。目安時間は 10 分。和積公式で積に直すと、 $\sin 2x = 0$ と $\cos x = 0$ の零点が重なっていることが分かる。重複して数えないよう、零点の集合を $\pi/2$ 刻みとしてまとめるのが大切である。(2) は個数を厳密に床関数で書かなくても、 $2m/\pi$ との差が 1 未満であることを示せば極限には十分である。和積公式と 3 倍角公式の 2 通りで零点列 $x = k\pi/2$ と密度 $2/\pi$ が一致した。

【第 3 問】

s を実数とし、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = s, \quad (n+2)a_{n+1} = na_n + 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

- (1) a_n を n と s を用いて表せ。
- (2) ある正の整数 m に対して $\sum_{n=1}^m a_n = 0$ が成り立つとする。 s を m を用いて表せ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

漸化式には定数解 $a_n = 1$ があるので、 $a_n - 1$ に注目する。すると $a_{n+1} - 1 = n(a_n - 1)/(n+2)$ となり、積が $2/(n(n+1))$ に簡約される。(2) は一般項を足し、 $1/(n(n+1)) = 1/n - 1/(n+1)$ の部分分数分解で和を消す。 m は正の整数なので、最後に m で割ってよい。

【解答】

(1) 与えられた漸化式は $(n+2)a_{n+1} = na_n + 2$ である。両辺から $n+2$ を引くと $(n+2)(a_{n+1} - 1) = n(a_n - 1)$ となる。したがって $a_{n+1} - 1 = \frac{n}{n+2}(a_n - 1)$ である。

これを繰り返すと、 $n \geq 2$ について $a_n - 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{3 \cdot 4 \cdots (n+1)}(s-1)$ である。分子と分母を整理すると $\frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{3 \cdot 4 \cdots (n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$ であるから、 $n = 1$ の場合も含めて $a_n = 1 + \frac{2(s-1)}{n(n+1)}$ である。

(2) (1) より

$$\sum_{n=1}^m a_n = \sum_{n=1}^m \left\{ 1 + \frac{2(s-1)}{n(n+1)} \right\} = m + 2(s-1) \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)}$$

である。ここで $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ だから $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}$ である。

したがって $\sum_{n=1}^m a_n = 0$ は $0 = m + 2(s-1) \frac{m}{m+1}$ と同値である。 m は正の整数なので $m > 0$ であり、両辺を m で割って $0 = 1 + \frac{2(s-1)}{m+1}$ となる。よって $2(s-1) = -(m+1)$ であり、 $s = 1 - \frac{m+1}{2} = \frac{1-m}{2}$ である。

▶ 別解 (不変量を帰納的に保つ)

【方針】

定数解 1 との差を取り、 $n(n+1)(a_n - 1)$ が n によらないことを示す。和は部分分数分解で望遠和にする。

【解答】

(1) 漸化式から

$$(n+2)(a_{n+1} - 1) = n(a_n - 1)$$

を得る。両辺に $n+1$ を掛けると

$$(n+1)(n+2)(a_{n+1} - 1) = n(n+1)(a_n - 1).$$

したがって

$$b_n = n(n+1)(a_n - 1)$$

は一定である。初項は

$$b_1 = 2(s-1)$$

だから

$$n(n+1)(a_n - 1) = 2(s-1).$$

よって

$$a_n = 1 + \frac{2(s-1)}{n(n+1)}.$$

(2)

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

より

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}.$$

したがって

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^m a_n \\ &= m + 2(s-1) \frac{m}{m+1}. \end{aligned}$$

$m > 0$ なので m で割り,

$$1 + \frac{2(s-1)}{m+1} = 0.$$

これを解いて

$$s = \frac{1-m}{2}.$$

【総評】 係数つき漸化式を定数解との差で処理する標準問題。目安時間は 15 分。 $a_n = 1$ が特別な解であることに気づくと、 $a_n - 1$ がきれいな積で表せる。積の分母が 3 から $n+1$ までになるため、 $2/(n(n+1))$ への整理を丁寧に書くとよい。(2) は部分分数分解で和が望ましく消えるため、計算量は小さい。積の反復と不変量の帰納法で一般項を再現し、 $s = (1-m)/2$ が一致した。

【第 4 問】

実数 $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ に対して、整式 $f(x) = x^2 - ax + 1$ を考える。

- (1) 整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は $f(x)$ で割り切れることを示せ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ の虚数解であって虚部が正のものを α とする。 α を極形式で表せ。ただし、 $r^5 = 1$ を満たす実数 r が $r = 1$ のみであることは、認めて使用してよい。
- (3) 設問 (2) の虚数 α に対して、 $\alpha^{2023} + \alpha^{-2023}$ の値を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

$a = (\sqrt{5}-1)/2$ は $a^2 + a = 1$ を満たすので、まず因数分解を直接確認する。(2) は $f(\alpha) = 0$ と (1) から $\alpha^5 = 1$, $\alpha \neq 1$ を得る。さらに解の積が 1 で虚数解なので $|\alpha| = 1$, $\alpha + \alpha^{-1} = a = 2 \cos(2\pi/5)$ と読み、虚部正から偏角 $2\pi/5$ を選ぶ。(3) は指数を 5 で割った余りに直して三角関数で計算する。

【解答】

(1) $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ であるから $a^2 + a = 1$ が成り立つ。実際、 $a^2 = (3-\sqrt{5})/2$ である。

ここで $(x^2 - ax + 1)(x^2 + (a+1)x + 1)$ を展開すると、 $x^4 + x^3 + (2-a^2-a)x^2 + x + 1$ である。 $a^2 + a = 1$ より $2-a^2-a=1$ なので $(x^2 - ax + 1)(x^2 + (a+1)x + 1) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ である。したがって $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ は $f(x)$ で割り切れる。

(2) $f(x) = 0$ の虚数解のうち虚部が正のものを α とする。(1) より $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ である。また $\alpha = 1$ なら左辺は 5 であり矛盾する。したがって $(\alpha-1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = \alpha^5 - 1 = 0$ より $\alpha^5 = 1$, $\alpha \neq 1$ である。

一方、 $f(x) = x^2 - ax + 1$ の 2 つの解の積は 1 である。係数は実数なので 2 つの虚数解は共役であり、その積は $|\alpha|^2$ に等しい。よって $|\alpha| = 1$ である。さらに $f(\alpha) = 0$ を α で割ると $\alpha + \alpha^{-1} = a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ である。 $|\alpha| = 1$ で

虚部が正だから $\alpha = \cos \theta + i \sin \theta$, $0 < \theta < \pi$ と書ける。このとき $\alpha + \alpha^{-1} = 2 \cos \theta$ なので $\cos \theta = \cos \frac{2\pi}{5}$ である。 $0 < 2\pi/5 < \pi$ だから $\theta = \frac{2\pi}{5}$ である。したがって $\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ である。

(3) $\alpha^5 = 1$ であり、2023 を 5 で割ると余りは 3 である。よって $\alpha^{2023} + \alpha^{-2023} = \alpha^3 + \alpha^{-3}$ である。(2) の極形式から $\alpha^3 + \alpha^{-3} = 2 \cos \frac{6\pi}{5}$ である。 $\cos(6\pi/5) = -\cos(\pi/5)$, $2 \cos(\pi/5) = (1+\sqrt{5})/2$ より $\alpha^{2023} + \alpha^{-2023} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である。

▶ 別解 ($f(x)$ を法とする剰余計算)

【方針】

$x^2 = ax - 1$ を繰り返して 4 次式の剰余を直接 0 にする。根については 5 乗根の偏角と解の和の符号から該当する根を選ぶ。

【解答】

(1)

$$a^2 + a = 1$$

である。 $f(x) = 0$, すなわち

$$x^2 = ax - 1$$

という関係を用いて高次の項を順に下げると

$$\begin{aligned} x^3 &= ax^2 - x \\ &= (a^2 - 1)x - a = -ax - a, \\ x^4 &= -ax^2 - ax \\ &= -(a^2 + a)x + a = -x + a. \end{aligned}$$

よって $f(x)$ を法として

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &\equiv (-x + a) + (-ax - a) \\ &\quad + (ax - 1) + x + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

したがってこの 4 次式は $f(x)$ で割り切れる。

(2) $f(\alpha) = 0$ だから (1) より

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

$\alpha \neq 1$ なので

$$\alpha^5 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0,$$

すなわち $\alpha^5 = 1$ である。

また二根の積は 1 で、係数が実数だから二根は共役である。よって

$$|\alpha|^2 = 1, \quad |\alpha| = 1.$$

虚部が正の 5 乗根の候補は偏角 $2\pi/5, 4\pi/5$ の二つである。一方、二根の和は

$$\alpha + \bar{\alpha} = a > 0$$

だから α の実部は正である。よって偏角は $2\pi/5$ であり,

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}.$$

(3) $2023 \equiv 3 \pmod{5}$ より

$$\alpha^{2023} + \alpha^{-2023} = \alpha^3 + \alpha^{-3} = 2 \cos \frac{6\pi}{5}.$$

$$2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

を用いて

$$\alpha^{2023} + \alpha^{-2023} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

【総評】 5 乗根と 2 次式を結びつける複素数平面の標準問題。目安時間は 17 分。 $a^2 + a = 1$ を使った因数分解が出発点で、そこから $\alpha^5 = 1$ を得る。極形式では、解の積が 1 であることから $|\alpha| = 1$ を確認し、 $\alpha + \alpha^{-1} = 2 \cos \theta$ と読むのが安全である。最後は指数を 5 で割った余りに戻すだけだが、虚部正で選んだ偏角を保って計算する。因数分解と $f(x)$ を法とする剰余計算で 5 乗根を導き、最終値も一致した。

【第 5 問】

四面体 $OABC$ において、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおき、次が成り立つとする。

$$\angle AOB = 60^\circ, \quad |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |\vec{c}| = \sqrt{6}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$

ただし $\vec{b} \cdot \vec{c}$ は、2つのベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を表す。さらに、線分 OC と線分 AB は垂直であるとする。点 C から 3 点 O, A, B を含む平面に下ろした垂線を CH とし、点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線を OK とする。

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と $\vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (3) ベクトル $\vec{c}$ とベクトル $\overrightarrow{HK}$ は平行であることを示せ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

$\angle AOB = 60^\circ$ から $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ を得る。さらに $OC \perp AB$ は $\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ なので、 $\vec{c} \cdot \vec{a}$ も決まる。 H は $\vec{c}$ の平面 OAB への正射影なので、 $\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおき、 $\vec{c} - \overrightarrow{OH}$ が $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直という連立方程式を解く。(3) は $OK = OH + \lambda c$ の形を作り、平面 ABC 上にあり、かつ平面に垂直であることを確認して $HK \parallel c$ を示す。

【解答】

(1) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \angle AOB = 60^\circ$ より $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$ である。

また、線分 OC と線分 AB が垂直であるから、方向ベクトル $\vec{c}$ と $\vec{b} - \vec{a}$ は垂直である。したがって $\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ である。 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$ なので $3 - \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ となり、 $\vec{c} \cdot \vec{a} = 3$ である。

(2) H は C から平面 OAB に下ろした垂線の足であるから、 H は平面 OAB 上にある。よって $\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおける。

また $CH \perp OAB$ なので、 $\vec{c} - \overrightarrow{OH}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直である。したがって

$$(\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$$

$$(\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

である。内積の値を代入すると $3 - 4x - 3y = 0$, $3 - 3x - 9y = 0$ すなわち $4x + 3y = 3$, $3x + 9y = 3$ である。これを解くと $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{9}$ である。よって $\overrightarrow{OH} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}$ である。

(3) $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} + \frac{2}{9}\vec{c}$ とおく。まずこの点が平面 ABC 上にあることを確認する。(2) より

$$\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

であり、係数の和は $\frac{2}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = 1$ である。したがって点 K は平面 ABC 上にある。

次に OK が平面 ABC に垂直であることを示す。平面 ABC の方向ベクトルとして $\vec{b} - \vec{a}$, $\vec{c} - \vec{a}$ を用いればよい。

まず、 H は $\vec{c}$ の平面 OAB への正射影なので

$$\overrightarrow{OH} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 3, \quad \overrightarrow{OH} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 3$$

である。よって $\overrightarrow{OK} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ である。

また

$$\overrightarrow{OH} \cdot \vec{c} = \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} \right) \cdot \vec{c} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

であり、 $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{a} = 3, |\vec{c}|^2 = 6, \vec{c} \cdot \vec{a} = 3$ だから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OK} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) &= \left(\overrightarrow{OH} + \frac{2}{9}\vec{c} \right) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \left(\frac{7}{3} - 3 \right) + \frac{2}{9}(6 - 3) = 0 \end{aligned}$$

である。

したがって OK は平面 ABC に垂直であり、この点は問題で定めた垂線の足 K である。すると

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH} = \frac{2}{9}\vec{c}$$

である。よって $\vec{c}$ と $\overrightarrow{HK}$ は平行である。

▶ 別解（具体的な直交座標を設定する）

【方針】

平面 OAB を xy 平面に置いて $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の成分を決める。候補点 K が平面 ABC 上にあり、 OK がその平面に垂直であることを成分で確認する。

【解答】

(1)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cos 60^\circ = 3.$$

また $OC \perp AB$ より

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0.$$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$ だから

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 3.$$

(2) 平面 OAB を xy 平面として

$$\vec{a} = (2, 0, 0), \quad \vec{b} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

と置く。 $\vec{c} = (p, q, r)$ とおくと、(1) の内積から

$$2p = 3, \quad \frac{3}{2}p + \frac{3\sqrt{3}}{2}q = 3.$$

よって

$$p = \frac{3}{2}, \quad q = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$|\vec{c}|^2 = 6$ から $r^2 = 11/3$ である。向きを取り直して

$$\vec{c} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{11}{3}}\right)$$

としてよい。

H は C の xy 平面への正射影だから

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right).$$

これを $\vec{a}, \vec{b}$ で表すと

$$\overrightarrow{OH} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b}.$$

(3)

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} + \frac{2}{9}\vec{c}$$

で定まる点を考える。(2) より

$$\overrightarrow{OK} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}.$$

係数の和が 1 なので、この点は平面 ABC 上にある。

$z = \sqrt{11/3}$ と略記すると

$$\overrightarrow{OK} = \left(\frac{11}{6}, \frac{11}{18\sqrt{3}}, \frac{2z}{9}\right),$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, z\right).$$

直接内積を計算すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} &= -\frac{11}{12} + \frac{11}{12} = 0, \\ \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\frac{11}{12} + \frac{11}{108} + \frac{2}{9} \cdot \frac{11}{3} \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって $OK \perp ABC$ であり、この点が問題の K である。したがって

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH} = \frac{2}{9}\vec{c}.$$

ゆえに $\vec{c}$ と $\overrightarrow{HK}$ は平行である。

【総評】 空間ベクトルの射影と垂線を扱う理系標準上位の問題。目安時間は 25 分。 $OC \perp AB$ を $\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ と翻訳できるかが最初の鍵である。 H は正射影なので、 $\vec{c} - OH$ が平面 OAB の 2 方向に垂直という連立方程式で求まる。(3) は候補 $OK = OH + 2\vec{c}/9$ を作り、平面上にあることと垂直であることを別々に確認するのが見通しのよい書き方である。内積の連立と具体的な直交座標の 2 通りで、 $\overrightarrow{HK} = (2/9)\vec{c}$ が一致した。

【第 6 問】

関数 $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{6x+1}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ の接線で、傾きが 1 であり、かつ接点の x 座標が正であるものの方程式を求めよ。
- (2) 座標平面上の 2 点 $P(x, f(x))$, $Q(x+1, f(x)+1)$ を考える。 x が $0 \leq x \leq 2$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形 S の概形を描け。また S の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1) は $f'(x) = 1$ を解き、接点の x 座標が正の解を選ぶ。(2) は文系第 4 問と同じく $u = X, v = Y - X$ に変換し、掃過線分を $v = h(x) = f(x) - x$, $x \leq u \leq x+1$ と見る。 $h(x)$ は $[0, 1/2]$ で増加, $[1/2, 2]$ で減少するので、同じ v に対応する 2 つの x の間隔を 2 次方程式の根の差で求める。2 区間が重なるかどうかの境目 $x_2 - x_1 = 1$ を使って幅を分け、積分する。

【解答】

(1) $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{6x+1}$ であるから $f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{24}{(6x+1)^2}$ である。接線の傾きが 1 である条件は $-\frac{1}{2} + \frac{24}{(6x+1)^2} = 1$ である。したがって $\frac{24}{(6x+1)^2} = \frac{3}{2}$ より $(6x+1)^2 = 16$ である。接点の x 座標が正であるから $6x+1 = 4$ を選び、 $x = \frac{1}{2}$ である。このとき $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$ なので、接線の方程式は $y + \frac{5}{4} = x - \frac{1}{2}$ すなわち $y = x - \frac{7}{4}$ である。

(2) 線分 PQ 上の点を (X, Y) とし、 $u = X$, $v = Y - X$ とおく。この変換は面積を変えない。 PQ 上では $v = f(x) - x = -\frac{3}{2}x - \frac{4}{6x+1}$ であり、 $x \leq u \leq x+1$ である。 $h(x) = f(x) - x$ とおくと $h'(x) = -\frac{3}{2} + \frac{24}{(6x+1)^2}$ である。 $h'(x) = 0$ は $(6x+1)^2 = 16$ から $x = 1/2$ であり、 $0 \leq x \leq 1/2$ で増加、 $1/2 \leq x \leq 2$ で減少する。また

$$h(0) = -4, \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}, \quad h(2) = -\frac{43}{13}$$

である。

同じ v に対応する 2 つの x を $x_1 < x_2$ とする。方程式 $v = h(x)$ を整理すると $18x^2 + (3+12v)x + 8+2v = 0$ である。したがって 2 解の差は $x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{(4v-9)(4v+7)}}{6}$ である。

各 x は u 方向の区間 $[x, x+1]$ を作る。 $-4 \leq v \leq -43/13$ では対応する x は左側の 1 つだけなので幅は 1 である。 $-43/13 \leq v \leq -7/4$ では 2 つの x がある。2 つの区間が重ならないのは $x_2 - x_1 \geq 1$ のときであり、境目は

$\frac{\sqrt{(4v-9)(4v+7)}}{6} = 1$ から $v = -\frac{9}{4}$ である。よって幅は

$$\begin{cases} 1 & (-4 \leq v \leq -\frac{43}{13}), \\ 2 & (-\frac{43}{13} \leq v \leq -\frac{9}{4}), \\ 1 + \frac{\sqrt{(4v-9)(4v+7)}}{6} & (-\frac{9}{4} \leq v \leq -\frac{7}{4}) \end{cases}$$

である。

したがって面積 S は

$$S = \int_{-4}^{-43/13} 1 dv + \int_{-43/13}^{-9/4} 2 dv + \int_{-9/4}^{-7/4} \left(1 + \frac{\sqrt{(4v-9)(4v+7)}}{6} \right) dv$$

である。

最後の根号を含む積分について、 $t = 4v + 8$ とおくと、 $v = -9/4$ で $t = -1$ 、 $v = -7/4$ で $t = 1$ であり、 $(4v-9)(4v+7) = (t-17)(t-1) = (17-t)(1-t)$ となる。この計算から

$$\int_{-9/4}^{-7/4} \frac{\sqrt{(4v-9)(4v+7)}}{6} dv = \frac{5}{4} - \frac{4}{3} \log 2$$

である。よって

$$S = \frac{9}{13} + \frac{55}{26} + \frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{4}{3} \log 2 = \frac{237}{52} - \frac{4}{3} \log 2$$

である。

概形は、 u, v 平面では $v = -4$ から $v = -43/13$ まで幅 1、 $v = -43/13$ から $v = -9/4$ まで幅 2、その後 $v = -7/4$ に向かって 2 つの区間が重なりながら幅が 1 へ近づく図形である。元の (X, Y) 平面では、これを $Y = X + v$ の斜め方向に戻した掃過領域になる。

▶ 別解（媒介変換の面積から重複分を引く）

【方針】

線分を $(x+t, f(x)+t)$ と媒介表示し、 $x = 1/2$ の両側が作る二領域の面積を求める。同じ高さで重なる部分だけ二次方程式の根の差を用いて引く。

【解答】

(1)

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{24}{(6x+1)^2}.$$

$f'(x) = 1$ より

$$(6x+1)^2 = 16.$$

正の解は $x = 1/2$ であり、

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}.$$

したがって接線は

$$y + \frac{5}{4} = x - \frac{1}{2}, \quad y = x - \frac{7}{4}.$$

(2) 線分上の点を

$$(X, Y) = (x+t, f(x)+t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

と表し、

$$u = X, \quad v = Y - X$$

とおく。このせん断は面積を保ち、

$$v = h(x) := f(x) - x = -\frac{3}{2}x - \frac{4}{6x+1}, \quad x \leq u \leq x+1$$

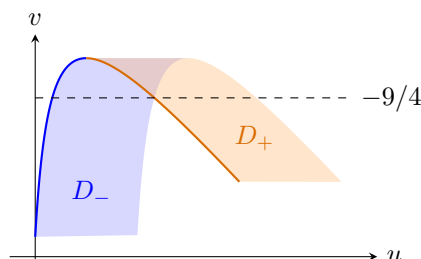
となる。

$$h(0) = -4, \quad h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}, \quad h(2) = -\frac{43}{13}.$$

h は $[0, 1/2]$ で増加し, $[1/2, 2]$ で減少する。それぞれの枝が作る領域の水平幅は 1 なので, 面積は

$$|D_-| = -\frac{7}{4} - (-4) = \frac{9}{4},$$

$$|D_+| = -\frac{7}{4} - \left(-\frac{43}{13}\right) = \frac{81}{52}.$$



同じ v に対応する二つの解を $x_1 < x_2$ とする。 $v = h(x)$ を整理すると

$$18x^2 + (3 + 12v)x + 8 + 2v = 0$$

であるから

$$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{(4v - 9)(4v + 7)}}{6}.$$

二つの長さ 1 の区間が重なるのは $x_2 - x_1 < 1$, すなわち

$$-\frac{9}{4} < v \leq -\frac{7}{4}$$

のときである。重なるの幅は

$$1 - \frac{\sqrt{(4v - 9)(4v + 7)}}{6}.$$

根号部分の積分を I とおく。 $t = 4v + 8$, さらに $w = 1 - t$ と置けば

$$I = \int_{-9/4}^{-7/4} \frac{\sqrt{(4v - 9)(4v + 7)}}{6} dv$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^2 \sqrt{w(w + 16)} dw.$$

$\sqrt{w(w + 16)} = \sqrt{(w + 8)^2 - 64}$ として積分すると

$$I = \frac{5}{4} - \frac{4}{3} \log 2.$$

よって重なるの面積は

$$\frac{1}{2} - I = -\frac{3}{4} + \frac{4}{3} \log 2.$$

したがって求める面積は

$$S = |D_-| + |D_+| - |D_- \cap D_+|$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{81}{52} - \left(-\frac{3}{4} + \frac{4}{3} \log 2\right)$$

$$= \frac{237}{52} - \frac{4}{3} \log 2.$$

上図を逆せん断して $Y = X + v$ と戻したものが, 元の座標平面での概形である。

【総評】 掃過領域の重なりを正確に処理する難しめの面積問題。目安時間は 32 分。(1) の接線は短い, (2) では $v = f(x) - x$ の増減, 2つの逆像の距離, 区間 $[x, x + 1]$ の重なりを順に見る必要がある。 $v = -43/13$ は右端 $x = 2$ が現れる高さ, $v = -9/4$ は2つの区間が接し始める高さであり, どちらも面積分割の境目である。最後の積分は形だけで済ませず, どの区間を積分しているかを明示すると答案の信頼性が上がる。せん断座標の断面幅と媒介変換の重複補正で, 面積 $237/52 - (4/3) \log 2$ が一致した。