

東北大学 2024 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a を正の実数とし、 $f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2$ とする。 O を原点とする xy 平面上の放物線 $C : y = f(x)$ の頂点を A とする。直線 OA と C の交点のうち A と異なるものを $P(p, f(p))$ とし、 O から C へ引いた接線の接点を $Q(q, f(q))$ とする。ただし、 $q > 0$ とする。

- (1) p, q の値を a を用いて表せ。また、 $p > q$ であることを示せ。
- (2) 放物線 C の $q \leq x \leq p$ の部分、線分 OP 、および線分 OQ で囲まれた図形の面積を S とおく。 S を a を用いて表せ。
- (3) (2) の S に対し、 $S = \frac{2}{3}$ となるときの a の値を求めよ。

▶ 解法 1 (接線条件と区分積分)

【方針】

頂点と接線を先に確定し、囲まれる図形をどの直線・曲線で分けるかを明確にする。頂点は平方完成で求め、 P は直線 OA と放物線の交点、 Q は原点を通る接線条件 $f(q) = qf'(q)$ で決める。面積は $0 \leq x \leq q$ では線分 OP と線分 OQ の間、 $q \leq x \leq p$ では線分 OP と放物線の間に分かれるので、この 2 つの積分を丁寧に計算する。最後は $S = \frac{2}{3}$ に代入し、 $a > 0$ から正の解だけを採用する。

【解答】

(1) 平方完成すると $f(x) = x^2 - 2ax + 4a^2 = (x - a)^2 + 3a^2$ であるから、放物線 C の頂点は $A(a, 3a^2)$ である。よって、 $O(0, 0)$ と $A(a, 3a^2)$ を通る直線 OA の方程式は $y = 3ax$ である。

P はこの直線と C の交点のうち A でない点であるから、 $x^2 - 2ax + 4a^2 = 3ax$ を解く。整理して $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$ 、 $(x - a)(x - 4a) = 0$ となる。 $x = a$ は頂点 A に対応するので、 $p = 4a$ である。

次に、 $x = q$ における接線が原点を通る条件を立てる。接線の傾きは $f'(q) = 2q - 2a$ であり、接線の方程式は $y - f(q) = f'(q)(x - q)$ である。これが原点を通るので、 $x = 0, y = 0$ を代入して $-f(q) = -qf'(q)$ 、 $f(q) = qf'(q)$ を得る。したがって $q^2 - 2aq + 4a^2 = q(2q - 2a)$ であり、右辺を移項すると $q^2 = 4a^2$ である。 $a > 0, q > 0$ より $q = 2a$ となる。以上より $p = 4a > 2a = q$ である。

(2) 線分 OP は O と $P(4a, f(4a))$ を結ぶ。実際に $f(4a) = 12a^2$ であるから、その方程式は $y = 3ax$ である。また、線分 OQ は原点と $Q(2a, f(2a))$ を結ぶ。 $f(2a) = 4a^2$ なので、その方程式は $y = 2ax$ である。

囲まれた図形は、 $0 \leq x \leq 2a$ では 2 本の直線 OP, OQ の間、 $2a \leq x \leq 4a$ では直線 OP と放物線 C の間である。よって

$$S = \int_0^{2a} (3ax - 2ax) dx + \int_{2a}^{4a} \{3ax - (x^2 - 2ax + 4a^2)\} dx$$

である。すなわち

$$S = \int_0^{2a} ax dx + \int_{2a}^{4a} (-x^2 + 5ax - 4a^2) dx$$

となる。

第 1 項は

$$\int_0^{2a} ax dx = a \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2a} = 2a^3$$

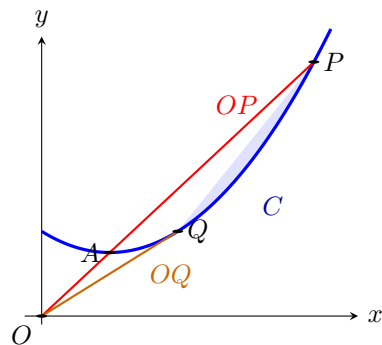
である。第 2 項は

$$\begin{aligned} \int_{2a}^{4a} (-x^2 + 5ax - 4a^2) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5a}{2}x^2 - 4a^2x \right]_{2a}^{4a} \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16 \right) a^3 - \left(-\frac{8}{3} + 10 - 8 \right) a^3 \\ &= \frac{8}{3}a^3 - \left(-\frac{2}{3}a^3 \right) \\ &= \frac{10}{3}a^3 \end{aligned}$$

である。したがって $S = 2a^3 + \frac{10}{3}a^3 = \frac{16}{3}a^3$ である。

(3) $S = \frac{2}{3}$ を (2) の式に代入すると $\frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3}$ である。両辺に 3 をかけて $16a^3 = 2$, $a^3 = \frac{1}{8}$ を得る。 $a > 0$ であるから $a = \frac{1}{2}$ である。

【図形の位置関係 ($a = 1$ に正規化)】



青色部分が求める領域であり、 $x = q$ を境に下側の境界が直線 OQ から放物線 C へ切り替わる。

▶ 別解 (相似変換で面積の次数を先に決める)

【方針】

座標を $x = aX$, $y = a^2Y$ と正規化する。すると放物線・2 直線の形は a に依存せず、面積だけが横 a 倍・縦 a^2 倍、すなわち a^3 倍になる。 $a = 1$ の基準図形の面積を 1 回だけ計算する。

【解答】

(1) 頂点は $A(a, 3a^2)$ なので $OA : y = 3ax$ である。放物線との交点条件は

$$x^2 - 2ax + 4a^2 = 3ax \iff (x - a)(x - 4a) = 0$$

であり、 A でない交点から $p = 4a$ を得る。また原点を通る接線の接点条件 $f(q) = qf'(q)$ から $q^2 = 4a^2$ となり、 $q > 0$ より $q = 2a$ である。ゆえに $p > q$ である。

(2) $x = aX$, $y = a^2Y$ とおくと

$$C : Y = X^2 - 2X + 4, \quad OP : Y = 3X, \quad OQ : Y = 2X$$

となる。したがって図形の形は $a = 1$ の場合と同じで、面積は横方向の倍率 a と縦方向の倍率 a^2 の積、すなわち a^3 倍になる。

$a = 1$ の基準図形では $q = 2, p = 4$ であるから、面積は

$$\int_0^2 (3X - 2X) dX + \int_2^4 \{3X - (X^2 - 2X + 4)\} dX = 2 + \frac{10}{3} = \frac{16}{3}.$$

よって $S = \frac{16}{3}a^3$ である。

(3) $\frac{16}{3}a^3 = \frac{2}{3}$ より $a^3 = \frac{1}{8}$ であり、 $a > 0$ から $a = \frac{1}{2}$ である。

【総評】 【公式出題意図・講評との対応】 微積分を用いて接線と平面図形の面積を求める標準問題である。公式講評では正答率は高かった一方、求める領域を取り違えた答案があったとされる。本解説では $x = q$ の前後で境界が変わることを図示し、積分区間を分ける理由まで明記した。

難度 5、計算量 5、想定時間 18 分。接線条件は $f(q) = qf'(q)$ 、面積は $0 \leq x \leq q$ と $q \leq x \leq p$ の 2 区間である。別解では $x = aX$, $y = a^2Y$ により面積が a^3 に比例することを先に見抜く。

【独立検算】 $a = 1$ として $p = 4, q = 2$ 、2 区間の面積がそれぞれ 2, 10/3 になることを再計算し、 $S = 16a^3/3$ と $a = 1/2$ を確認した。

【第 2 問】

以下の問いに答えよ。

(1) t を $t > 1$ を満たす実数とする。正の実数 x が 2 つの条件

$$(a) \ x > \frac{1}{\sqrt{t}-1}$$

$$(b) \ x \geq 2 \log_t x$$

をともに満たすとする。このとき、不等式

$$x+1 > 2 \log_t (x+1)$$

を示せ。

(2) $n \leq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

▶ 解法 1 (対数差を 2 項に分ける)

【方針】

(1) は示したい差 $(x+1) - 2 \log_t (x+1)$ を、条件 (b) で下から押さえられる $x - 2 \log_t x$ と、条件 (a) から正になる $1 - 2 \log_t (1 + 1/x)$ に分ける。条件 (a) は逆数をとって $1 + 1/x < \sqrt{t}$ へ変形するのが決め手である。(2) は小さい n を直接判定し、 $n = 5$ で不成立を確認した後、(1) を $t = 2$ で用いて「ある整数で不成立なら次も不成立」を $n \geq 5$ に伝播させる。

【解答】

(1) 示したい不等式の左辺との差を考える。対数の性質より $\log_t (x+1) = \log_t x + \log_t (1 + \frac{1}{x})$ であるから、

$$\begin{aligned} (x+1) - 2 \log_t (x+1) &= x+1 - 2 \log_t x - 2 \log_t \left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= (x - 2 \log_t x) + \left\{1 - 2 \log_t \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right\} \end{aligned}$$

である。

条件 (b) より $x - 2 \log_t x \geq 0$ である。次に条件 (a) を使う。 $x > 0$ なので、 $x > \frac{1}{\sqrt{t}-1}$ から、両辺の逆数をとって $\frac{1}{x} < \sqrt{t}-1$ である。よって $1 + \frac{1}{x} < \sqrt{t}$ となる。 $t > 1$ なので、底 t の対数は増加関数であり、 $\log_t (1 + \frac{1}{x}) < \log_t \sqrt{t} = \frac{1}{2}$ を得る。したがって $1 - 2 \log_t (1 + \frac{1}{x}) > 0$ である。

以上より $(x+1) - 2 \log_t (x+1) > 0$ となるから、 $x+1 > 2 \log_t (x+1)$ が示された。

(2) まず小さい正の整数を調べる。 $1 \leq 2 \log_2 1 = 0$ は成り立たない。 $2 = 2 \log_2 2$, $3 < 2 \log_2 3$, $4 = 2 \log_2 4$ であるから、 $n = 2, 3, 4$ は条件を満たす。

次に $n \geq 5$ では条件を満たさないことを示す。まず $2 \log_2 5 < 5$ を確認する。これは $\log_2 5 < \frac{5}{2}$ すなわち $5 < 2^{5/2} = 4\sqrt{2}$ と同値であり、 $25 < 32$ より正しい。したがって $n = 5$ は不成立である。

ここで、ある正の実数 x について $x > 2 \log_2 x$ かつ $x > \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$ が成り立つなら、(1) を $t = 2$ に適用できる。条件 (b) は $x \geq 2 \log_2 x$ として満たされ、条件 (a) も満たされるので、 $x+1 > 2 \log_2 (x+1)$ が従う。

$n = 5$ では $5 > 2 \log_2 5$ であり、また $5 > \sqrt{2} + 1$ である。よって上の議論を $x = 5, 6, 7, \dots$ に順に用いると、すべての $n \geq 5$ について $n > 2 \log_2 n$ となる。したがって、条件 $n \leq 2 \log_2 n$ を満たす正の整数は 2, 3, 4 である。

▶ 別解（対数を指数不等式へ戻す）

【方針】

(1) は条件 (b) に 1 を加えて $\log_t(tx^2)$ を作り、条件 (a) から $tx^2 > (x+1)^2$ を示す。(2) は $n \leq 2\log_2 n$ を $2^n \leq n^2$ に直し、 $n = 5$ 以降では逆向きの不等式を帰納的に示す。

【解答】

(1) 条件 (b) から

$$x+1 \geq 2\log_t x + 1 = \log_t x^2 + \log_t t = \log_t(tx^2).$$

一方、条件 (a) を変形すると

$$x(\sqrt{t}-1) > 1 \iff \sqrt{t}x > x+1.$$

両辺は正なので 2 乗して $tx^2 > (x+1)^2$ を得る。 $t > 1$ だから $\log_t$ は増加関数であり、

$$\log_t(tx^2) > \log_t(x+1)^2 = 2\log_t(x+1).$$

以上をつなげれば $x+1 > 2\log_t(x+1)$ である。

(2) 条件は

$$n \leq 2\log_2 n \iff 2^n \leq n^2$$

と同値である。 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ を調べると、成立するのは $2, 3, 4$ である。

$n \geq 5$ では $2^n > n^2$ を帰納法で示す。 $n = 5$ では $32 > 25$ である。 $2^n > n^2$ と仮定すると、 $n \geq 5$ より

$$2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 > 0$$

だから

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 > (n+1)^2.$$

よってすべての $n \geq 5$ で不成立であり、求める整数は $2, 3, 4$ である。

【総評】 【公式出題意図・講評との対応】 対数関数の理解と、やや見通しにくい条件を証明へ正しく組み込む力を問う問題である。公式講評では、(1) を増減表で処理して証明に失敗した答案、(2) で帰納法の使い方を誤った答案、整数を拾い切れない答案が指摘されている。本解説は条件 (a)(b) の役割を別々に可視化し、帰納の開始点と推移を明示した。

難度 5、計算量 4、想定時間 16 分。標準解は対数差の分解、別解は $tx^2 > (x+1)^2$ と $2^n > n^2$ への変換であり、同じ結論を異なる見通しから確認できる。

【独立検算】 $n = 1$ から 8 までは直接比較し、成立が $2, 3, 4$ のみであること、 $n = 5$ からの帰納不等式が厳密に閉じることを確認した。

【第 3 問】

n を 2 以上の整数とする。それぞれ A, A, B と書かれた 3 枚のカードから無作為に 1 枚抜き出し、カードをもとに戻す試行を考える。この試行を n 回繰り返し、抜き出したカードの文字を順に左から右に並べ、 n 文字の文字列を作る。作った文字列内に AAA の並びがある場合は不可とする。また、作った文字列内に BB の並びがある場合も不可とする。これらの場合以外は可とする。たとえば $n = 6$ のとき、文字列 AAAABA や ABBBAA や ABBABB や BBBAAA など不可で、文字列 BABAAB や BABABA など可である。作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が AA である確率を p_n 、作った文字列が可でかつ右端の 2 文字が BA である確率を q_n 、作った文字列が可でかつ右端の文字が B である確率を r_n とそれぞれおく。

- (1) p_2, q_2, r_2 をそれぞれ求めよ。また、 $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ を p_n, q_n, r_n を用いてそれぞれ表せ。
- (2) $p_n + 2q_n + 2r_n$ を n を用いて表せ。
- (3) $p_n + iq_n - (1+i)r_n$ を n を用いて表せ。ただし、 i は虚数単位である。
- (4) $p_n = r_n$ を満たすための、 n の必要十分条件を求めよ。

【方針】

文字列の最後の形を AA, BA, B の 3 状態に分ける。次に A を引く確率は $2/3$ 、B を引く確率は $1/3$ であることを使い、AAA と BB を作らない遷移だけを残す。(2) と (3) は、問題で指定された一次結合が遷移によって何倍になるかを直接代入で確認する。(4) は (3) の複素数の実部が $p_n - r_n$ であることを使い、 $-(1+i)$ の累乗の実部が 0 になる周期を読む。

【解答】

(1) $n = 2$ のとき、右端の 2 文字が AA で可となる確率は、2 回とも A を引く確率であるから $p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ である。右端の 2 文字が BA となるには 1 回目に B、2 回目に A を引けばよいので $q_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ である。また、右端の文字が B で可となる 2 文字列は AB だけであり、BB は不可である。よって $r_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ である。

次に遷移を考える。可で右端が AA の文字列に A を続けると AAA ができて不可である。可で右端が BA の文字列に A を続けると右端が AA になる。したがって $p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n$ である。

右端が BA になるには、もとの可な文字列の右端が B で、次に A を引けばよい。よって $q_{n+1} = \frac{2}{3}r_n$ である。

右端が B になるには、次に B を引く必要がある。ただし、もとの右端が B なら BB ができて不可であるため、もとの右端は AA または BA でなければならない。よって $r_{n+1} = \frac{1}{3}(p_n + q_n)$ である。

(2) $U_n = p_n + 2q_n + 2r_n$ とおく。(1) の漸化式より

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= p_{n+1} + 2q_{n+1} + 2r_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}q_n + 2 \cdot \frac{2}{3}r_n + 2 \cdot \frac{1}{3}(p_n + q_n) \\ &= \frac{2}{3}p_n + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)q_n + \frac{4}{3}r_n \\ &= \frac{2}{3}(p_n + 2q_n + 2r_n) \\ &= \frac{2}{3}U_n \end{aligned}$$

である。また $U_2 = p_2 + 2q_2 + 2r_2 = \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{3}$ である。したがって $U_n = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{2^n}{3^{n-1}}$ である。よって

$p_n + 2q_n + 2r_n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$ である。

(3) $Z_n = p_n + iq_n - (1+i)r_n$ とおく。(1) の漸化式を代入すると

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= p_{n+1} + iq_{n+1} - (1+i)r_{n+1} \\ &= \frac{2}{3}q_n + i\frac{2}{3}r_n - (1+i)\frac{1}{3}(p_n + q_n) \\ &= -\frac{1+i}{3}p_n + \left(\frac{2}{3} - \frac{1+i}{3}\right)q_n + \frac{2i}{3}r_n \\ &= -\frac{1+i}{3}p_n + \frac{1-i}{3}q_n + \frac{2i}{3}r_n \end{aligned}$$

である。一方、

$$-\frac{1+i}{3}Z_n = -\frac{1+i}{3}p_n - \frac{i(1+i)}{3}q_n + \frac{(1+i)^2}{3}r_n$$

であり、 $-i(1+i) = 1-i$, $(1+i)^2 = 2i$ だから、これは上の式と一致する。よって $Z_{n+1} = -\frac{1+i}{3}Z_n$ である。

初期値は $Z_2 = \frac{4}{9} + i\frac{2}{9} - (1+i)\frac{2}{9} = \frac{2}{9}$ であるから、 $Z_n = \frac{2}{9} \left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$ である。すなわち $p_n + iq_n - (1+i)r_n = \frac{2}{9} \left(-\frac{1+i}{3}\right)^{n-2}$ である。

(4) 左辺の実部は $\operatorname{Re}\{p_n + iq_n - (1+i)r_n\} = p_n - r_n$ である。したがって $p_n = r_n$ は、(3) で得た複素数の実部が 0 であることと同値である。

定数 $\frac{2}{9} \cdot 3^{-(n-2)}$ は正の実数なので、実部が 0 になるかどうかは $\{-(1+i)\}^{n-2}$ だけで決まる。ここで $-(1+i) = -1-i$ であり、その累乗は

$k \pmod{4}$	0	1	2	3
$\{-(1+i)\}^k$	実数	実部あり	純虚数	実部あり

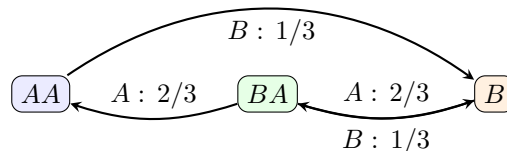
となる。実際、

$$\{-(1+i)\}^0 = 1, \quad \{-(1+i)\}^1 = -1-i, \quad \{-(1+i)\}^2 = 2i, \quad \{-(1+i)\}^3 = 2-2i$$

であり、4 乗ごとに実数倍されるだけである。

よって実部が 0 となるのは $n-2 \equiv 2 \pmod{4}$ のときである。したがって $n \equiv 0 \pmod{4}$ が必要十分条件である。

【許される状態遷移】



$AA \rightarrow AA$ は AAA を、 $B \rightarrow B$ は BB を作るため禁止される。

【総評】 【公式出題意図・講評との対応】 確率から数列、さらに複素数を公比とする等比数列へ段階的に切り替わる総合問題である。公式講評では (1)(2) は良好だったが、複素数が現れる (3) 以降で正答率が下がり、(4) までの完答はわずかだった。本解説は 3 状態の遷移を図示し、指定された一次結合が固有的に定数倍される計算を省略せず示した。

難度 7、計算量 6、想定時間 25 分。初期値は $r_2 = P(AB) = 2/9$ であり、 BB は不可なので含めない。(4) では実部が $p_n - r_n$ であることと、指数が $n-2$ であることを取り違えない。

【独立検算】 長さ 2 から 12 まで全文字列を重み付きで列挙し、漸化式、 $p_n + 2q_n + 2r_n = 2^n/3^{n-1}$ 、および $p_n = r_n \iff 4 \mid n$ を確認した。

【第 4 問】

xyz 空間において、点 $P_1(3, -1, 1)$ を中心とし半径が $\sqrt{5}$ の球面 S_1 と、点 $P_2(5, 0, -1)$ を中心とし半径が $\sqrt{2}$ の球面 S_2 を考える。

- (1) 線分 P_1P_2 の長さを求めよ。
- (2) S_1 と S_2 が交わりをもつことを示せ。この交わりは円となる。この円を C とし、その中心を P_3 とする。 C の半径および中心 P_3 の座標を求めよ。
- (3) (2) の円 C に対し、 C を含む平面を H とする。 xy 平面と H の両方に平行で、大きさが 1 のベクトルをすべて求めよ。
- (4) 点 Q が (2) の円 C 上を動くとき、 Q と xy 平面の距離 d の最大値を求めよ。また、 d の最大値を与える点 Q の座標を求めよ。

▶ 解法 1 (交円と平面への正射影)

【方針】

2 つの球面の中心間距離を求め、半径の和と差の間にあることから交わりが円になることを確認する。交円の中心は P_1P_2 上にあるので、 P_1 からの距離を s として、2 つの直角三角形の関係から s と円の半径を求める。平面 H は P_1P_2 に垂直である。(3) は z 成分 0 かつ法線ベクトルに垂直な単位ベクトルを解く。(4) は円 C 上で z 座標の絶対値を最大にする問題に直し、鉛直方向を平面 H へ正射影した方向に半径 1 だけ進む。

【解答】

(1) $\overrightarrow{P_1P_2} = (5-3, 0-(-1), -1-1) = (2, 1, -2)$ である。したがって $P_1P_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$ である。

(2) 2 つの球面の半径は $\sqrt{5}$ と $\sqrt{2}$ であり、中心間距離は 3 である。ここで $\sqrt{5} - \sqrt{2} < 3 < \sqrt{5} + \sqrt{2}$ が成り立つ。したがって 2 つの球面は交わりをもち、片方が他方に接するだけではないので、交わりは円となる。

この円の中心 P_3 は、中心を結ぶ直線 P_1P_2 上にある。 $P_1P_3 = s$ 、円 C の半径を ρ とおくと、 $P_1P_2 = 3$ より $P_2P_3 = 3 - s$ である。円 C 上の点を 1 つとれば、その点と P_3 を結ぶ線分は P_1P_2 に垂直であるから、 $s^2 + \rho^2 = 5$ 、 $(3-s)^2 + \rho^2 = 2$ が成り立つ。2 式を引くと $s^2 - (3-s)^2 = 3$ であり、 $6s - 9 = 3$ 、 $s = 2$ を得る。よって $\rho^2 = 5 - s^2 = 1$ であるから、円 C の半径は 1 である。

また、 P_3 は P_1 から P_2 へ向かって距離 2 だけ進んだ点である。 $\overrightarrow{P_1P_2}$ の長さは 3 なので、 $P_3 = P_1 + \frac{2}{3}\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -1, 1) + \frac{2}{3}(2, 1, -2)$ である。したがって $P_3 = \left(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ である。

(3) 平面 H は円 C を含む平面であり、中心線 P_1P_2 に垂直である。したがって H の法線ベクトルとして $\mathbf{n} = (2, 1, -2)$ をとれる。

求めるベクトルは xy 平面に平行なので、 z 成分を 0 として $\mathbf{v} = (u, v, 0)$ と書ける。また H に平行であるから $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ であり、 $2u + v = 0$ を満たす。大きさが 1 なので $u^2 + v^2 = 1$ である。 $v = -2u$ を代入して $5u^2 = 1$ より $u = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ 、 $v = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$ である。したがって求めるベクトルは

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

である。

(4) 点 Q は、中心 P_3 、半径 1 の円 C 上を動く。 Q と xy 平面との距離は $|z_Q|$ であるから、円 C 上で z 座標の絶対値を最大にすればよい。

平面 H 上で、 z 座標を最も小さくする向きは、鉛直下向きのベクトル $\mathbf{e} = (0, 0, -1)$ を平面 H に正射影した向きである。 $\mathbf{n} = (2, 1, -2)$ 、 $|\mathbf{n}|^2 = 9$ で、 $\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = 2$ だから、射影ベクトルは

$$\mathbf{w} = \mathbf{e} - \frac{\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = (0, 0, -1) - \frac{2}{9}(2, 1, -2) = \left(-\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{5}{9}\right)$$

である。その長さは $|\mathbf{w}| = \sqrt{\frac{16+4+25}{81}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ なので、平面 H 上の単位ベクトルとして

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)$$

を得る。

円 C の半径は 1 だから、この方向に P_3 から 1 だけ進む点が z 座標を最も小さくする点である。よって

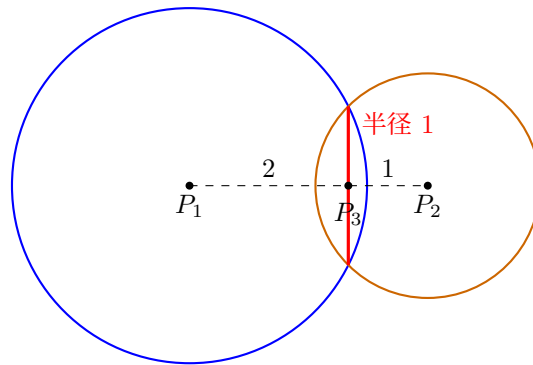
$$Q = P_3 + \mathbf{u} = \left(\frac{13}{3} - \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{1}{3} - \frac{5}{3\sqrt{5}} \right)$$

である。最後の座標を整理すると $z_Q = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{1+\sqrt{5}}{3}$ である。反対向きに進むと z 座標は $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$ となり、絶対値はこれより小さい。したがって距離 d の最大値は $\frac{1+\sqrt{5}}{3}$ であり、そのときの点は

$$Q = \left(\frac{13\sqrt{5}-4}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}, -\frac{1+\sqrt{5}}{3} \right)$$

である。

【中心を通る断面】



赤い弦を空間内で回したものが交円 C であり、その平面は P_1P_2 に垂直である。

▶ 別解（コーシーの不等式で高さを最適化）

【方針】

(1)～(3) で得た中心と平面を用い、 $Q = P_3 + (x, y, z)$ と置く。円上の条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と平面条件 $2x + y - 2z = 0$ から、コーシーの不等式で $|z|$ の上限と等号条件を同時に求める。

【解答】

(1) 中心間距離は 3 である。

(2) 中心線上で $P_1P_3 = 2, P_2P_3 = 1$ となるので、交円の半径は 1、中心は

$$P_3 = \left(\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

である。

(3) 交円の平面の法線は $(2, 1, -2)$ であり、 xy 平面にも平行な単位ベクトルは

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

である。

(4) 円上の点を

$$Q = P_3 + (x, y, z)$$

とおく。半径が 1 で、円の平面に平行な変位なので

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad 2x + y - 2z = 0$$

を満たす。コーシーの不等式から

$$4z^2 = (2x + y)^2 \leq 5(x^2 + y^2) = 5(1 - z^2)$$

であり、 $|z| \leq \sqrt{5}/3$ を得る。 P_3 の高さは $-1/3$ なので、 xy 平面からの距離の最大値は

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{3}$$

である。

最大距離には変位の z 成分が $-\sqrt{5}/3$ でなければならない。等号条件より (x, y) は $(2, 1)$ に比例し、 $2x + y = 2z$ と合わせると

$$(x, y, z) = \left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}}{3} \right).$$

したがって

$$Q = \left(\frac{13\sqrt{5}-4}{3\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}, -\frac{1+\sqrt{5}}{3} \right)$$

である。

【総評】 **【公式出題意図・講評との対応】** 2 球面の交わりとして現れる傾いた円を、空間図形とベクトルで考察する問題である。公式講評では (1)(2) は比較的良好だったが、(2) で三角形の存在条件を片側しか確認しない答案があり、(3) 以降は空間認識の不足から正答率が下がった。本解説は $|\sqrt{5}-\sqrt{2}| < 3 < \sqrt{5}+\sqrt{2}$ の両側を確認し、断面図と平面の法線に対応させた。

難度 6、計算量 6、想定時間 24 分。標準解は鉛直方向の平面への正射影、別解はコーシーの不等式で高さの上限と等号条件を同時に得る。

【独立検算】 求めた Q が 2 球面の双方に属すること、変位が法線 $(2, 1, -2)$ と直交すること、 $|Q-P_3|=1$ 、距離が $(1+\sqrt{5})/3$ になることを厳密計算で確認した。

【第 5 問】

$x \geq 2$ を満たす実数 x に対し、

$$f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$$

とおく。必要ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ であること、および、自然対数の底 e が $2 < e < 3$ を満たすことを証明なしで用いてもよい。

(1) $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(2x-3)}$ とおくとき、関数 $g(x)$ ($x \geq 2$) を求めよ。

(2) (1) で求めた関数 $g(x)$ に対し、 $g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α がただ 1 つ存在することを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ ($x \geq 2$) の増減と極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を調べ、 $y = f(x)$ ($x \geq 2$) のグラフの概形を xy 平面上に描け。ただし、(2) の α を用いてよい。グラフの凹凸は調べなくてよい。

(4) $2 \leq m < n$ を満たす整数 m, n の組 (m, n) に対して、等式

$$(2m-3)^n = (2n-3)^m$$

が成り立つとする。このような組 (m, n) をすべて求めよ。

▶ 解法 1 (単調性と素因数分解)

【方針】

(1) は商の微分で $f'(x)$ を計算し、指定された分母 $x^2(2x-3)$ に合わせて $g(x)$ を読む。(2) は $g'(x) = -2\log(2x-3)$ から g が $x=2$ 以後で単調減少すること、 $g(2) > 0$ かつ $g(x) \rightarrow -\infty$ であることを示す。(3) は f' の符号を g の符号で決める。(4) は与式を $f(m) = f(n)$ に変形し、 $g(6) < 0$ から $\alpha < 6$ を示して $m \geq 6$ を除く。残る $m = 2, 3, 4, 5$ は、両辺が同じ素因数だけを持つことと指数の倍数条件で絞り込む。

【解答】

(1) $f(x) = \frac{\log(2x-3)}{x}$ である。商の微分より $f'(x) = \frac{x \cdot \frac{2}{2x-3} - \log(2x-3)}{x^2}$ である。分母を $x^2(2x-3)$ にそろえると $f'(x) = \frac{2x - (2x-3)\log(2x-3)}{x^2(2x-3)}$ である。したがって $g(x) = 2x - (2x-3)\log(2x-3)$ である。

(2) (1) で求めた $g(x) = 2x - (2x - 3) \log(2x - 3)$ を微分する。すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 - \{2 \log(2x - 3) + (2x - 3) \cdot \frac{2}{2x - 3}\} \\ &= 2 - 2 \log(2x - 3) - 2 \\ &= -2 \log(2x - 3) \end{aligned}$$

である。 $x = 2$ のとき $2x - 3 = 1$ なので $g'(2) = 0$ であり、 $x > 2$ では $2x - 3 > 1$ より $\log(2x - 3) > 0$ だから $g'(x) < 0$ である。したがって g は $x \geq 2$ で単調減少である。

また $g(2) = 4 - (1) \log 1 = 4 > 0$ である。一方、 $t = 2x - 3$ とおくと $x = (t + 3)/2$ であり、 $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ である。よって $g(x) = t + 3 - t \log t = t \left(\frac{3}{t} + 1 - \log t \right)$ となり、 $\log t \rightarrow \infty$ より $g(x) \rightarrow -\infty$ である。したがって、中間値の考え方と単調性により、 $g(\alpha) = 0$ を満たす 2 以上の実数 α はただ 1 つ存在する。

(3) $x \geq 2$ では $x^2(2x - 3) > 0$ であるから、 $f'(x)$ の符号は $g(x)$ の符号と一致する。(2) より、 g は $2 \leq x < \alpha$ で正、 $x = \alpha$ で 0 、 $x > \alpha$ で負である。したがって f は $2 \leq x < \alpha$ で増加、 $x > \alpha$ で減少し、 $x = \alpha$ で最大値をとる。

また $f(2) = \frac{\log 1}{2} = 0$ である。さらに $t = 2x - 3$ とおくと $f(x) = \frac{\log t}{(t + 3)/2} = \frac{2 \log t}{t + 3}$ であり、問題文で与えられた極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = 0$ から $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ である。 $x > 2$ では $2x - 3 > 1$ なので $f(x) > 0$ である。したがってグラフは $(2, 0)$ から増加し、 $x = \alpha$ で最大となり、その後は x 軸の上側から 0 に近づく形である。

(4) 与式 $(2m - 3)^n = (2n - 3)^m$ の両辺の自然対数をとると $n \log(2m - 3) = m \log(2n - 3)$ である。 m, n は正で、 $2 \leq m < n$ だから、両辺を mn で割って $\frac{\log(2m - 3)}{m} = \frac{\log(2n - 3)}{n}$ となる。すなわち $f(m) = f(n)$ である。

まず $m \geq 6$ はありえないことを示す。 $e < 3$ より $\log 3 > 1$ であるから $g(6) = 12 - 9 \log 9 = 12 - 18 \log 3 < 12 - 18 < 0$ である。 $g(2) > 0$ かつ g は単調減少なので、 $g(\alpha) = 0$ となる α は $2 < \alpha < 6$ を満たす。したがって $m \geq 6$ なら $\alpha < m < n$ であり、 f は $[m, n]$ で減少する。よって $f(m) > f(n)$ となって、 $f(m) = f(n)$ に反する。したがって $m = 2, 3, 4, 5$ だけを調べればよい。

$m = 2$ のとき、与式は $1^n = (2n - 3)^2$ である。 $n > 2$ なら $2n - 3 \geq 3$ なので不可能である。

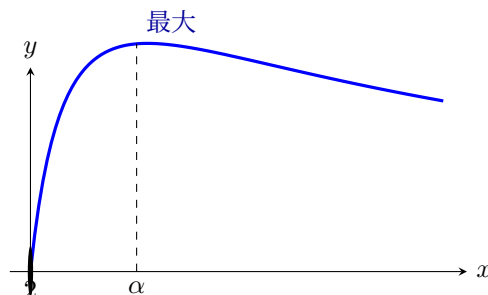
$m = 3$ のとき、 $3^n = (2n - 3)^3$ である。右辺が 3 乗であり、左辺は素数 3 だけからなるので、 n は 3 の倍数で、かつ $2n - 3$ は 3 のべきでなければならない。 $n = 3r$ とおくと $3^{3r} = (2n - 3)^3$ より $2n - 3 = 3^r$ である。すなわち $6r - 3 = 3^r$ 、 $2r - 1 = 3^{r-1}$ である。 $n > m = 3$ より $r \geq 2$ である。 $r = 2$ では $2r - 1 = 3$ 、 $3^{r-1} = 3$ となり成立するので、 $n = 6$ である。 $r \geq 3$ では、 $r = 3$ で $3^{r-1} = 9 > 5 = 2r - 1$ である。さらに $3^{r-1} > 2r - 1$ なら、 $3^r > 6r - 3 > 2r + 1 = 2(r + 1) - 1$ なので、帰納的にすべての $r \geq 3$ で等号は成り立たない。したがって $m = 3$ からは $(m, n) = (3, 6)$ を得る。

$m = 4$ のとき、 $5^n = (2n - 3)^4$ である。したがって n は 4 の倍数であり、 $n = 4r$ とおくと $2n - 3 = 5^r$ である。すなわち $8r - 3 = 5^r$ である。 $n > 4$ より $r \geq 2$ であるが、 $r = 2$ で $5^r = 25 > 13 = 8r - 3$ である。 $5^r > 8r - 3$ なら $5^{r+1} > 40r - 15 > 8r + 5 = 8(r + 1) - 3$ なので、帰納的に以後も等号は成り立たない。よって $m = 4$ では解はない。

$m = 5$ のとき、 $7^n = (2n - 3)^5$ である。よって $n = 5r$ とおくと $2n - 3 = 7^r$ 、 $10r - 3 = 7^r$ である。 $n > 5$ より $r \geq 2$ であるが、 $r = 2$ で $7^r = 49 > 17 = 10r - 3$ である。 $7^r > 10r - 3$ なら $7^{r+1} > 70r - 21 > 10r + 7 = 10(r + 1) - 3$ なので、帰納的に以後も等号は成り立たない。よって $m = 5$ でも解はない。

以上より、求める組は $(m, n) = (3, 6)$ である。

【グラフの概形】



f は $[2, \alpha]$ で増加し、 $[\alpha, \infty)$ で減少して 0 に近づく。

▶ 別解（単峰性と整数点の値を比較する）

【方針】

(1)～(3) で f が最大点 α の左右で厳密に単調であることを使う。(4) では $3 < \alpha < 5$ を示し、左側の候補 $m = 2, 3, 4$ を関数値の厳密比較だけで処理する。

【解答】

(1)

$$g(x) = 2x - (2x - 3) \log(2x - 3), \quad g'(x) = -2 \log(2x - 3).$$

(2) したがって g は $x \geq 2$ で減少し、零点 α はただ 1 つである。

(3) f は $[2, \alpha]$ で増加し、 $[\alpha, \infty)$ で減少する。また $f(2) = 0$ 、 $x > 2$ で $f(x) > 0$ 、 $f(x) \rightarrow 0$ である。

(4) $g(3) = 3(2 - \log 3) > 0$ である。実際 $e > 2$ から $e^2 > 4 > 3$ 、ゆえに $\log 3 < 2$ である。また $e < 3$ と $3^{10} < 7^7$ から $e^{10} < 7^7$ 、したがって $10 < 7 \log 7$ であり、 $g(5) = 10 - 7 \log 7 < 0$ である。よって

$$3 < \alpha < 5.$$

$f(m) = f(n)$ かつ $m < n$ なら、厳密単調性から $m < \alpha < n$ が必要である。したがって左側の整数候補は $m = 2, 3, 4$ に限られる。

$m = 2$ では $f(2) = 0$ だが $n > 2$ では $f(n) > 0$ なので不可能である。

$m = 3$ では

$$f(3) = \frac{\log 3}{3} = \frac{\log 9}{6} = f(6).$$

$6 > \alpha$ で、 f は $[\alpha, \infty)$ で厳密に減少するから、右側で同じ値をとる整数は $n = 6$ だけである。

$m = 4$ が左側にある場合は $\alpha > 4$ であり、右側の整数は $n \geq 5$ である。一方

$$f(4) > f(5) \iff 5^5 > 7^4$$

であり、 $3125 > 2401$ だから実際に $f(4) > f(5)$ である。右側では減少するため $f(n) \leq f(5) < f(4)$ となり不可能である。よって求める組は $(m, n) = (3, 6)$ のみである。

【総評】 【公式出題意図・講評との対応】微分によるグラフ考察を整数方程式へ応用する問題である。公式講評では (1)～(3) に多くの受験生が着手した一方、中間値の定理の使い方や増減表が不十分な答案があり、(4) を全場合について説明できた答案は少なかった。本解説は零点の存在と一意性を分け、(4) の候補排除を帰納法で厳密化した。

難度 7、計算量 6、想定時間 28 分。標準解は素因数分解、別解は単峰性と $f(3) = f(6)$ を利用する。どちらも「これ以後は増え方が大きい」とだけ述べず、単調性または帰納不等式で候補が尽きることを示す。

【独立検算】 g の零点を数値的に挟み、 $3 < \alpha < 5$ 、 $f(3) = f(6)$ を確認した。整数 $2 \leq m < n \leq 200$ を厳密整数演算で走査し、解が $(3, 6)$ のみであることも確認した。

【第 6 問】

xyz 空間内の xy 平面上にある円 $C : x^2 + y^2 = 1$ および円板 $D : x^2 + y^2 \leq 1$ を考える。 D を底面とし点 $P(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を K とする。 $A(0, -1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ とする。 xyz 空間内の平面 $H : z = x$ を考える。すなわち、 H は xz 平面上の直線 $z = x$ と線分 AB をともに含む平面である。 K の側面と H の交わりとしてできる曲線を E とする。 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対し、円 C 上の点 $Q(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ をとり、線分 PQ と E の共有点を R とする。

- (1) 線分 PR の長さを $r(\theta)$ とおく。 $r(\theta)$ を θ を用いて表せ。
- (2) 円錐 K の側面のうち、曲線 E の点 A から点 R までを結ぶ線分、線分 PA 、および線分 PR により囲まれた部分の面積を $S(\theta)$ とおく。 θ と実数 h が条件 $0 \leq \theta < \theta + h \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{h\{r(\theta)\}^2}{2\sqrt{2}} \leq S(\theta + h) - S(\theta) \leq \frac{h\{r(\theta + h)\}^2}{2\sqrt{2}}$$

- (3) 円錐 K の側面のうち、円 C の $x \geq 0$ の部分と曲線 E により囲まれた部分の面積を T とおく。 T を求めよ。必要であれば $\tan \frac{\theta}{2} = u$ とおく置換積分を用いてもよい。

【方針】

(1) は線分 PQ 上の点を、頂点 P から底面方向へ距離 r だけ進んだ点として座標表示し、平面 $H : z = x$ に代入して $r(\theta)$ を求める。(2) は円錐側面を半径 $\sqrt{2}$ の扇形に展開し、底面円の角度 $d\theta$ が展開図では $d\theta/\sqrt{2}$ に対応することを使って、面積要素を $\frac{1}{2\sqrt{2}}r(\theta)^2 d\theta$ と表す。単調性は $r(\theta)$ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で増加することから示す。(3) は展開図で、半径 $\sqrt{2}$ の外側扇形から曲線 $r(\theta)$ の内側を引き、半角置換で積分を計算する。

【解答】

(1) 点 Q は $Q = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ であり、頂点は $P = (0, 0, 1)$ である。線分 PQ の長さは $PQ = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 1} = \sqrt{2}$ である。

線分 PQ 上で、 P からの距離が r である点は、 P から Q へ向かう単位ベクトルを用いて $P + \frac{r}{\sqrt{2}}(Q - P)$ と表せる。したがってその座標は

$$\left(\frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta, \frac{r}{\sqrt{2}} \sin \theta, 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} \right)$$

である。この点が平面 $H : z = x$ 上にあるための条件は $1 - \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \cos \theta$ である。よって $1 = \frac{r}{\sqrt{2}}(1 + \cos \theta)$ となり、

$$r(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{1 + \cos \theta} \text{ である。}$$

(2) 円錐 K の母線の長さは、頂点 P から底面円上の点までの距離なので $\sqrt{2}$ である。側面を展開すると、半径 $\sqrt{2}$ の扇形になる。底面円の弧長は角度 $d\theta$ に対して $d\theta$ であり、展開図上では半径 $\sqrt{2}$ の扇形の弧長に等しいから、展開図上の角度 $d\phi$ は $\sqrt{2} d\phi = d\theta$, $d\phi = \frac{d\theta}{\sqrt{2}}$ を満たす。

したがって、展開図で曲線 E の半径が $r(\theta)$ で表されるとき、 A から角度 θ までの部分の面積は

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} r(u)^2 d\phi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} r(u)^2 du$$

である。

$0 \leq \theta < \theta + h \leq \frac{\pi}{2}$ とする。この区間では $\cos u$ は減少するので、 $1 + \cos u$ も減少し、 $r(u) = \frac{\sqrt{2}}{1 + \cos u}$ は増加する。よって $\theta \leq u \leq \theta + h$ では $r(\theta) \leq r(u) \leq r(\theta + h)$ である。これを 2 乗して積分すると

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} h r(\theta)^2 \leq S(\theta + h) - S(\theta) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} h r(\theta + h)^2$$

である。すなわち

$$\frac{h}{2\sqrt{2}} r(\theta)^2 \leq S(\theta + h) - S(\theta) \leq \frac{h}{2\sqrt{2}} r(\theta + h)^2$$

である。

(3) 求める部分 T は、展開図で $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に対応する半径 $\sqrt{2}$ の扇形から、曲線 E の内側の部分を引いた面積である。したがって

$$T = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ (\sqrt{2})^2 - r(\theta)^2 \right\} d\theta$$

である。(1) より $r(\theta)^2 = \frac{2}{(1+\cos\theta)^2}$ だから、

$$T = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ 2\pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{(1+\cos\theta)^2} d\theta \right\}$$

である。

残る積分を計算する。 $u = \tan \frac{\theta}{2}$ とおくと $\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $d\theta = \frac{2}{1+u^2} du$ であり, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動くと, u は -1 から 1 まで動く。また $1 + \cos \theta = 1 + \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{2}{1+u^2}$ である。よって

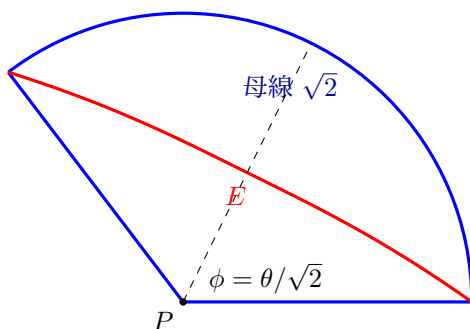
$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{(1+\cos\theta)^2} d\theta &= \int_{-1}^1 \frac{2}{\left(\frac{2}{1+u^2}\right)^2} \cdot \frac{2}{1+u^2} du \\ &= \int_{-1}^1 (1+u^2) du \\ &= \left[u + \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

である。したがって

$$T = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(2\pi - \frac{8}{3} \right) = \frac{3\pi - 4}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(3\pi - 4)}{6}$$

である。

【円錐側面の展開図】



底面円の角度差 $d\theta$ は、展開図では $d\phi = d\theta/\sqrt{2}$ に対応する。赤い曲線の動径が $r(\theta)$ である。

【総評】 【公式出題意図・講評との対応】 三角関数、空間図形、積分を融合し、円錐側面を展開して平面図形へ帰着する問題である。公式講評では全体の正答率が非常に低く、(1) の直線の媒介表示、(2) の展開図という発想、(3) で (2) の不等式が導関数を与えることのいずれにも課題が見られた。本解説は空間座標と展開図を並行して示し、面積係数 $1/(2\sqrt{2})$ の由来を明記した。

難度 8、計算量 7、想定時間 32 分。 $PQ = \sqrt{2}$ 、展開図の角度は底面角の $1/\sqrt{2}$ 倍である。(3) では外側の母線半径 $\sqrt{2}$ の扇形から、内側の $r(\theta)$ で囲まれる部分を引く。

【独立検算】 R の座標を $z = x$ へ再代入して $r(\theta) = \sqrt{2}/(1+\cos\theta)$ を確認した。面積差分から $S'(\theta) = r(\theta)^2/(2\sqrt{2})$ を確認し、半角置換の定積分が $8/3$ 、最終値が $(3\pi - 4)/(3\sqrt{2})$ になることを再計算した。