

入 学 試 験 問 題

数 学



東 北 大 学 2025 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

原点を出発点として数直線上を動く点 P がある。試行 (*) を次のように定める。

(*) 1 枚の硬貨を 1 回投げて、

- 表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める。
- 裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ、
奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め、
偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める。

ただし、硬貨を投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ ，さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 試行 (*) を 3 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。
- (2) 試行 (*) を 6 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。
- (3) n を 3 で割り切れない正の整数とする。試行 (*) を n 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

第 2 問

正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) k を実数とする。 $a_n = \log_2 x_n$, $b_n = \log_2 y_n$ とおく。このとき、数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ。
- (2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

第 3 問

a を実数とし，関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$$

このとき，以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ が極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ で極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。

第 4 問

n を正の整数, a を正の実数とし, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = n \log x, \quad g(x) = ax^n$$

また, 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が共有点をもち, その共有点における 2 つの曲線の接線が一致しているとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。
- (3) (2) で求めた S_n に対し, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

第 5 問

S を xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面とする。また、点 $P(a, b, c)$ を点 $N(0, 0, 1)$ とは異なる球面 S 上の点とする。点 P と点 N を通る直線 l と xy 平面との交点を Q とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q の座標を a, b, c を用いて表せ。
- (2) xy 平面上の点 $(p, q, 0)$ と点 N を通る直線を m とする。直線 m と球面 S の交点のうち、点 N 以外の交点の座標を p, q を用いて表せ。
- (3) 点 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ を通り、ベクトル $(3, 4, 5)$ に直交する平面 α を考える。点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき、点 Q は xy 平面上の円周上を動くことを示せ。

第 6 問

1 辺の長さが 1 の正五角形を K とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) K の対角線の長さを求めよ。
- (2) K の周で囲まれた図形を P とする。また、 P を K の外接円の中心の周りに各 θ だけ回転して得られる図形を P_θ とする。 P と P_θ の共通部分の周の長さを l_θ とする。 θ が $0^\circ < \theta < 72^\circ$ の範囲を動くとき、 l_θ の最小値が $2\sqrt{5}$ であることを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)