

東北大学 2025 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

原点を出発点として数直線上を動く点 P がある。試行 (*) を次のように定める。

(*) 1 枚の硬貨を 1 回投げて、

- 表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める。
- 裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ、
奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め、
偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める。

ただし、硬貨を投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ 、さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 試行 (*) を 3 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。
- (2) 試行 (*) を 6 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。
- (3) n を 3 で割り切れない正の整数とする。試行 (*) を n 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

【方針】

1 回の試行で実際に起こる移動は、+1 と -2 の 2 種類だけである。まずそれぞれの確率をまとめ、-2 になる回数を j とおく。 n 回後の位置は、+1 が $n-j$ 回、-2 が j 回なので $(n-j) - 2j = n - 3j$ である。原点に戻るには $n = 3j$ が必要で、(1)、(2) では対応する j を二項分布で数え、(3) では n が 3 で割り切れないため到達不可能と判断する。

【解答】

1 回の試行で点 P が正の向きに 1 だけ進むのは、硬貨で表が出る場合、または硬貨で裏が出てさいころで奇数が出る場合である。したがってその確率は $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。また、負の向きに 2 だけ進むのは、硬貨で裏が出てさいころで偶数が出る場合なので、その確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$ である。よって、1 回の試行は +1 が確率 $\frac{3}{4}$ 、-2 が確率 $\frac{1}{4}$ で起こると見ればよい。

(1) 3 回の試行のうち、-2 だけ進む回数を j とする。このとき +1 だけ進む回数は $3-j$ 回であり、3 回後の位置は $(3-j) - 2j = 3 - 3j$ である。原点に戻るには $3 - 3j = 0$ すなわち $j = 1$ であればよい。したがって求める確率は

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$$

である。

(2) 6 回の試行のうち、-2 だけ進む回数を j とする。このとき 6 回後の位置は $(6-j) - 2j = 6 - 3j$ である。原点に戻るには $6 - 3j = 0$ すなわち $j = 2$ であればよい。したがって求める確率は

$${}_6C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 15 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{81}{256} = \frac{1215}{4096}$$

である。

(3) n 回の試行のうち、-2 だけ進む回数を j とする。このとき +1 だけ進む回数は $n-j$ 回であり、 n 回後の位置は $(n-j) - 2j = n - 3j$ である。原点に戻るには $n - 3j = 0$ すなわち $n = 3j$ が必要である。しかし、問題では n は 3 で割り切れない正の整数であるから、この等式を満たす整数 j は存在しない。したがって原点に戻ることは不可能であり、求める確率は 0 である。

【総評】 難度 4、計算量 3、想定時間 10 分。公式の出題意図どおり、硬貨とさいころの二段階試行を、移動量 +1 (確率 $\frac{3}{4}$) と -2 (確率 $\frac{1}{4}$) の反復試行へ整理する問題である。-2 の回数を j とすれば位置は $n - 3j$ なので、原点へ戻るための必要十分条件は $n = 3j$ である。(1)(2) は二項分布、(3) は到達可能性だけで決まる。公式講評が指摘するように、各枝を毎回数え直すより移動量ごとの確率を最初にまとめると計算が短く、(3) の論証も明瞭になる。

【第 2 問】

正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) k を実数とする。 $a_n = \log_2 x_n$, $b_n = \log_2 y_n$ とおく。このとき、数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ。
- (2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

▶ 解法 1 (最初の 3 項で必要性を示す)

【方針】

対数で連立一次漸化式に直す。(1) は特定の初期値から始まる数列なので、形式的な係数比較だけではなく、最初の 3 項が等比数列の条件を満たすことから候補を絞り、その各候補が全項で十分であることを確認する。(2) は $a_n - b_n$ と $a_n + 2b_n$ の 2 本の等比数列を連立する。

【解答】

(1) $x_n, y_n > 0$ なので

$$a_n = \log_2 x_n, \quad b_n = \log_2 y_n$$

とおける。漸化式に対数をとると

$$a_{n+1} = 5a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 6b_n$$

である。初期値は $(a_1, b_1) = (1, -1)$ だから

$$(a_2, b_2) = (3, -5), \quad (a_3, b_3) = (5, -27)$$

となる。

$c_n = a_n + kb_n$ とおくと

$$c_1 = 1 - k, \quad c_2 = 3 - 5k, \quad c_3 = 5 - 27k.$$

まず $k = 1$ なら $c_1 = 0$, $c_2 = -2$ であり、公比 r に対して $c_2 = rc_1$ とならないので等比数列ではない。 $k \neq 1$ のとき、等比数列であるためには少なくとも

$$c_2^2 = c_1 c_3$$

が必要である。したがって

$$\begin{aligned} 0 &= (3 - 5k)^2 - (1 - k)(5 - 27k) \\ &= -2(k - 2)(k + 1) \end{aligned}$$

より $k = 2, -1$ に限られる。

逆に $k = 2$ なら

$$a_{n+1} + 2b_{n+1} = 7(a_n + 2b_n)$$

なので公比 7 の等比数列である。また $k = -1$ なら

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n)$$

なので公比 4 の等比数列である。よって必要十分な k は

$$k = 2, \quad -1$$

である。

(2) 上で得た 2 本の等比数列の初項は

$$a_1 + 2b_1 = -1, \quad a_1 - b_1 = 2$$

であるから

$$a_n + 2b_n = -7^{n-1}, \quad a_n - b_n = 2 \cdot 4^{n-1}.$$

後者を 2 倍して前者と加えると

$$3a_n = 4 \cdot 4^{n-1} - 7^{n-1} = 4^n - 7^{n-1}.$$

したがって

$$a_n = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}, \quad x_n = 2^{a_n} = 2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}$$

である。 $n = 1$ を代入すると $x_1 = 2$ となり、初期値とも一致する。

▶ 解法 2 (2 階漸化式へ帰着)

【方針】

(1) は最初の 3 項に等比条件を課し、候補 $k = 2, -1$ を得て十分性を直接確認する。(2) は b_n を消去して a_n の 2 階線形漸化式を作り、特性方程式で解く。

【解答】

(1) $(a_1, b_1) = (1, -1)$ 、 $(a_2, b_2) = (3, -5)$ 、 $(a_3, b_3) = (5, -27)$ である。 $c_n = a_n + kb_n$ とおけば

$$c_1 = 1 - k, \quad c_2 = 3 - 5k, \quad c_3 = 5 - 27k.$$

$k = 1$ は $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ なので不適である。それ以外では $c_2^2 = c_1c_3$ が必要で、

$$(3 - 5k)^2 = (1 - k)(5 - 27k)$$

を解くと $k = 2, -1$ を得る。実際

$$a_{n+1} + 2b_{n+1} = 7(a_n + 2b_n), \quad a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n)$$

なので、どちらも十分である。

(2) 第一の漸化式から

$$2b_n = a_{n+1} - 5a_n$$

である。また

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 5a_{n+1} + 2b_{n+1} \\ &= 5a_{n+1} + 2a_n + 12b_n \\ &= 11a_{n+1} - 28a_n. \end{aligned}$$

初期値は $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ である。特性方程式

$$\lambda^2 - 11\lambda + 28 = (\lambda - 4)(\lambda - 7) = 0$$

より

$$a_n = A4^{n-1} + B7^{n-1}.$$

$A + B = 1$, $4A + 7B = 3$ を解くと $A = 4/3$, $B = -1/3$ であるから

$$a_n = \frac{4^n - 7^{n-1}}{3}, \quad x_n = 2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}.$$

この式は元の初期値と漸化式から導いたので全ての自然数 n に対して成り立つ。

【総評】 難度 6、計算量 5、想定時間 20 分。公式の出題意図は、等比数列と対数の性質を組み合わせることにある。公式講評が特に指摘する通り、 (a_n, b_n) は任意の値を動くわけではないため、単なる形式的な係数比較だけでは必要性の証明にならない。最初の 3 項から候補を絞り、 $k = 2, -1$ のそれぞれで全項の漸化式を確認すれば必要十分性が完結する。(2) は 2 本の等比数列を連立する方法と、 a_n の 2 階漸化式へ落とす方法が相互検算になる。初期値 $b_1 = -1$ の符号にも注意する。

【第 3 問】

a を実数とし、関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ が極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ が $x=0$ で極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。

▶ 解法 1 (導関数の根の配置と符号変化)

【方針】

まず $f'(x) = 2x\{2x^2 + 2ax + a + 2\}$ と因数分解する。極大値をもつかどうかは、導関数がどこかで $+$ から $-$ に変わるかで判定する。2 次式 $h(x) = 2x^2 + 2ax + a + 2$ の判別式、根の符号、および例外 $a = -2$ を分けて符号表を作る。(2) は $f(x) = x^2\{x^2 + (4a/3)x + a + 2\}$ なので、 $x=0$ 近くで x^2 に掛かる係数 $a+2$ が負なら極大、0 以上なら極大でないと判定する。

【解答】

(1) $f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$ より $f'(x) = 4x^3 + 4ax^2 + 2(a+2)x = 2x\{2x^2 + 2ax + a + 2\}$ である。ここで $h(x) = 2x^2 + 2ax + a + 2$ とおく。 $h(x)$ の判別式を D とすると $D = (2a)^2 - 4 \cdot 2(a+2) = 4(a^2 - 2a - 4)$ である。したがって $h(x)$ が異なる 2 つの実数解をもつのは $a^2 - 2a - 4 > 0$ すなわち $a < 1 - \sqrt{5}$, $1 + \sqrt{5} < a$ のときである。

まず $1 - \sqrt{5} \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$ のとき、 $h(x) \geq 0$ である。したがって $f'(x) = 2xh(x)$ の符号は基本的に x の符号と同じであり、 $x=0$ では $-$ から $+$ に変わるか、符号を変えない。よって極大値は生じない。

次に $a > 1 + \sqrt{5}$ のときを考える。このとき $a+2 > 0$ 、2 つの根の和は $-a < 0$ 、積は $(a+2)/2 > 0$ であるから、 $h(x) = 0$ の 2 つの根はいずれも負である。小さい方から $r_1 < r_2 < 0$ とすると、 $h(x)$ は (r_1, r_2) で負、その外で正である。 $x < 0$ では $2x < 0$ だから、 $f'(x)$ は r_2 の前後で $+$ から $-$ に変わる。よって極大値をもつ。

次に $a < 1 - \sqrt{5}$ のときを考える。ここでは $h(x)$ は異なる 2 つの実数解をもつ。さらに $a = -2$ の場合は $f'(x) = 2x(2x^2 - 4x) = 4x^2(x - 2)$ である。このとき $x=0$ では符号が変わらず、 $x=2$ では $-$ から $+$ に変わるの、極大値をもたない。

一方、 $a < 1 - \sqrt{5}$ かつ $a \neq -2$ のときは、次のように符号変化が生じる。 $a < -2$ なら $h(0) = a+2 < 0$ なので、 $x=0$ の左側で $f'(x) > 0$ 、右側で $f'(x) < 0$ となり、 $x=0$ で極大となる。 $-2 < a < 1 - \sqrt{5}$ なら $h(0) = a+2 > 0$ で、 $h(x) = 0$ の 2 根はいずれも正であるため、小さい方の根で $f'(x)$ が $+$ から $-$ に変わる。よって極大値をもつ。

以上より、求める範囲は $a < 1 - \sqrt{5}$ ($a \neq -2$)、 $1 + \sqrt{5} < a$ である。

場合分けを表にまとめると次のようになる。

a の範囲	$h(x) = 0$ の根の配置	極大の有無
$a < -2$	負と正に 1 根ずつ	$x=0$ で極大
$a = -2$	0, 2 (ただし 0 は重複)	なし
$-2 < a < 1 - \sqrt{5}$	正の 2 根	小さい根で極大
$1 - \sqrt{5} \leq a \leq 1 + \sqrt{5}$	相異なる 2 実根なし	なし
$1 + \sqrt{5} < a$	負の 2 根	大きい根で極大

ここで各行の条件は「かつ」で結ばれ、極大が存在する行どうしは「または」で結ばれる。

(2) $f(x) = x^2\left\{x^2 + \frac{4a}{3}x + a + 2\right\}$ である。 $x=0$ での値は $f(0) = 0$ である。 $x=0$ の近くでは、中括弧の中は $a+2$ に近い。

もし $a+2 < 0$ なら、 $x=0$ に十分近い $x \neq 0$ について $x^2 + \frac{4a}{3}x + a + 2 < 0$ となる。したがって $f(x) < 0 = f(0)$ となり、 $x=0$ で極大値をもつ。

もし $a+2 > 0$ なら、 $x=0$ の近くで中括弧の中は正であり、 $f(x) > 0 = f(0)$ となるので極大ではない。また $a = -2$ のとき $f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 = x^3(x - \frac{8}{3})$ であり、 $x < 0$ で $x=0$ に近いとき $f(x) > 0 = f(0)$ となるので、やはり極大ではない。したがって求める範囲は $a < -2$ である。

▶ 解法 2 (極値条件を局所展開で確認)

【方針】

(1) は $f'(x) = 2xh(x)$ の判別式と根の符号を表で整理する。(2) は $x = 0$ 近傍の最低次項 $x^2(a+2)$ を見て判定し、境界 $a = -2$ だけを三次項で別に調べる。

【解答】

(1)

$$f'(x) = 2x\{2x^2 + 2ax + a + 2\} = 2xh(x)$$

とおく。 h が相異なる 2 実根をもつ条件は

$$a < 1 - \sqrt{5} \quad \text{または} \quad a > 1 + \sqrt{5}$$

である。根の和は $-a$ 、積は $(a+2)/2$ なので、 $a < -2$ では 2 根は異符号、 $-2 < a < 1 - \sqrt{5}$ では 2 根はともに正、 $a > 1 + \sqrt{5}$ では 2 根はともに負である。 $2x$ の符号も合わせると、それぞれ $x = 0$ 、正の小さい根、負の大きい根で f' が正から負へ変わる。

ただし $a = -2$ では

$$f'(x) = 4x^2(x - 2)$$

となり、 $x = 0$ では符号が変わらず、 $x = 2$ では負から正へ変わるだけなので極大はない。したがって

$$a < 1 - \sqrt{5} \ (a \neq -2) \quad \text{または} \quad a > 1 + \sqrt{5}$$

である。

(2)

$$f(x) = x^2 \left(a + 2 + \frac{4a}{3}x + x^2 \right)$$

である。 $a < -2$ なら括弧内は $x = 0$ の近くで負なので、 $x \neq 0$ に対して $f(x) < f(0) = 0$ となり極大である。 $a > -2$ なら逆に正となり極小側なので極大ではない。

境界 $a = -2$ では

$$f(x) = x^3 \left(x - \frac{8}{3} \right).$$

$x < 0$ で 0 に十分近いと $f(x) > 0 = f(0)$ だから極大ではない。よって

$$a < -2$$

である。これは $f''(0) = 2(a+2)$ で $a \neq -2$ を判定し、境界だけ直接確認する方法と同じ結論である。

【総評】 難度 7、計算量 6、想定時間 25 分。公式の出題意図は、微分の基本事項と 4 次関数のグラフを、論理記号を含め正確に扱うことにある。判別式だけでは極大の有無は決まらず、 $h(x) = 2x^2 + 2ax + a + 2$ の 2 根と 0 の位置を調べ、 f' が正から負へ変わる点を特定する。 $a = -2$ は $x = 0$ が重複して符号変化しない例外である。公式講評が指摘する「かつ」と「または」を表で明示し、(2) は最低次項または二階導関数で判定した後、境界だけ三次項で確認する。

【第 4 問】

n を正の整数, a を正の実数とし, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = n \log x, \quad g(x) = ax^n$$

また, 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が共有点を持ち, その共有点における 2 つの曲線の接線が一致しているとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。
- (3) (2) で求めた S_n に対し, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

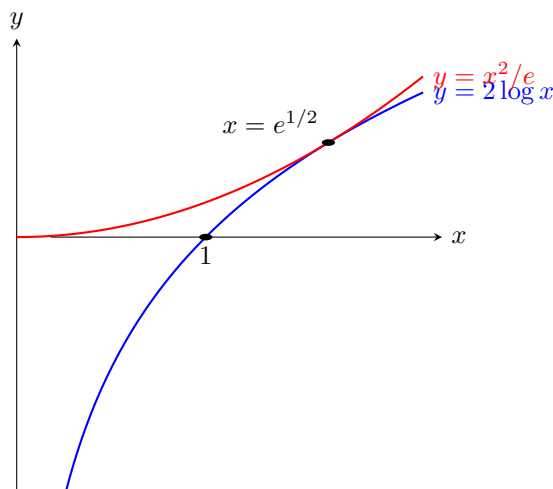
【方針】

共有点を $x = x_0$ とおき, 値の一致 $n \log x_0 = ax_0^n$ と微分係数の一致 $n/x_0 = anx_0^{n-1}$ を連立する。微分係数の一致から $ax_0^n = 1$, したがって $n \log x_0 = 1$ となる。面積は, $f(x) = n \log x$ が $x = 1$ で x 軸と交わり, $g(x) = x^n/e$ は $[0, e^{1/n}]$ で正であることを使って, $[0, 1]$ では g と x 軸, $[1, e^{1/n}]$ では $g - f$ を積分する。極限は $t = 1/n$ と置いて $((e^t - 1)/t - 1)/(1 + t)$ の形に直す。

【解答】

(1) 共有点の x 座標を x_0 とする。 $f(x) = n \log x$ であるから $x_0 > 0$ である。2 つの曲線が共有点を持ち, その点で接線が一致するので, 値と微分係数がともに等しい。すなわち $n \log x_0 = ax_0^n$ かつ $\frac{n}{x_0} = anx_0^{n-1}$ である。後者は $n > 0$, $x_0 > 0$ より $1 = ax_0^n$ と同値である。これを値の一致の式に代入すると $n \log x_0 = 1$ である。したがって $\log x_0 = \frac{1}{n}$ より $x_0 = e^{1/n}$ である。さらに $ax_0^n = 1$ だから $a = \frac{1}{x_0^n} = \frac{1}{e}$ である。よって $a = \frac{1}{e}$ である。

(2) (1) より $g(x) = \frac{1}{e}x^n$ である。また $f(1) = n \log 1 = 0$ であり, 2 曲線の接点は $x = e^{1/n}$ である。例えば $n = 2$ のときの位置関係は次のようになる。



図の左側では x 軸と g 、右側では g と f の差を積分する。 $0 < x < 1$ では $f(x) < 0$, $g(x) > 0$ なので, x 軸と 2 曲線で囲まれる部分のうち左側は $g(x)$ と x 軸で囲まれる。 $1 < x < e^{1/n}$ では $g(x) \geq f(x)$ となり, 右側の部分は $g(x) - f(x)$ で表される。したがって

$$S_n = \int_0^1 g(x) dx + \int_1^{e^{1/n}} \{g(x) - f(x)\} dx$$

である。つまり

$$S_n = \int_0^{e^{1/n}} \frac{1}{e} x^n dx - \int_1^{e^{1/n}} n \log x dx$$

である。

まず

$$\int_0^{e^{1/n}} \frac{1}{e} x^n dx = \frac{1}{e} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{e^{1/n}} = \frac{1}{e} \cdot \frac{e^{(n+1)/n}}{n+1} = \frac{e^{1/n}}{n+1}$$

である。次に

$$\int n \log x \, dx = n(x \log x - x)$$

だから

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{1/n}} n \log x \, dx &= n[x \log x - x]_1^{e^{1/n}} \\ &= n \left(e^{1/n} \cdot \frac{1}{n} - e^{1/n} + 1 \right) \\ &= n - (n-1)e^{1/n} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{e^{1/n}}{n+1} - \{n - (n-1)e^{1/n}\} \\ &= \frac{n^2 e^{1/n}}{n+1} - n \\ &= \frac{n(ne^{1/n} - n - 1)}{n+1} \end{aligned}$$

である。

(3) $t = \frac{1}{n}$ とおくと, $n \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$ である。(2) の式を t で表すと $S_n = \frac{1}{1+t} \left(\frac{e^t - 1}{t} - 1 \right)$ である。指数関数の微分係数の定義より $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1+0}(1-1) = 0$ である。

【総評】 難度 6、計算量 6、想定時間 22 分。公式の出題意図は、接線の一致・面積・極限という数学 III の基本事項を同じ設定で正確に処理することにある。接線が一致する条件は値と微分係数の 2 式に分ける。面積は $x = 1$ で境界が変わるため、 $[0, 1]$ の g と x 軸、 $[1, e^{1/n}]$ の $g - f$ に分ける。(3) は無限大と 0 の積を直観で処理せず、 $t = 1/n$ と置いて指数関数の微係数 $(e^t - 1)/t \rightarrow 1$ へ帰着させる。

【第 5 問】

S を xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面とする。また、点 $P(a, b, c)$ を点 $N(0, 0, 1)$ とは異なる球面 S 上の点とする。点 P と点 N を通る直線 l と xy 平面との交点を Q とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q の座標を a, b, c を用いて表せ。
- (2) xy 平面上の点 $(p, q, 0)$ と点 N を通る直線を m とする。直線 m と球面 S の交点のうち、点 N 以外の交点の座標を p, q を用いて表せ。
- (3) 点 $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ を通り、ベクトル $(3, 4, 5)$ に直交する平面 α を考える。点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき、点 Q は xy 平面上の円周上を動くことを示せ。

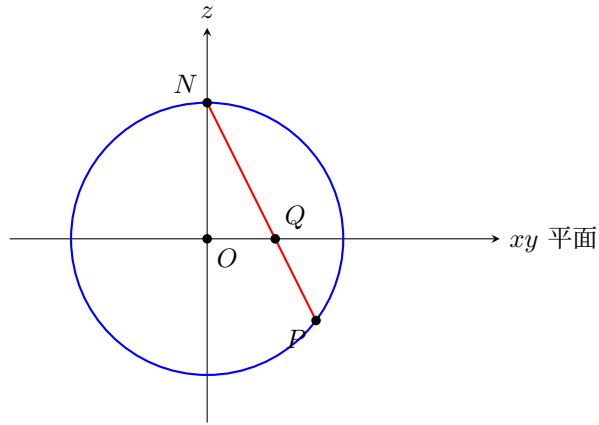
【方針】

(1) は直線 NP を $N + s(P - N)$ と置き、 $z = 0$ を代入して Q を求める。(2) は逆に、 xy 平面上の点 $(p, q, 0)$ と N を結ぶ直線を媒介変数で表し、球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ との交点を解く。点 N 以外の交点は、北極からの射影の逆写像になる。(3) では (2) の式を平面 $3x + 4y + 5z = 5/2$ に代入し、分母を払って p, q の 2 次方程式を得る。平方完成して円方程式に直せばよい。

【解答】

(1) 点 $N(0, 0, 1)$ と点 $P(a, b, c)$ を通る直線 l 上の点は、実数 s を用いて $(0, 0, 1) + s(a, b, c - 1)$ と表せる。点 $P \neq N$ であり、また P は球面上の点なので、 $c = 1$ なら $P = N$ となってしまう。したがって $c \neq 1$ である。 xy 平面との交点では $z = 0$ であるから $1 + s(c - 1) = 0$ である。よって $s = \frac{1}{1-c}$ である。したがって $Q = \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}, 0\right)$ である。

球面を直線 NP を含む平面で切った模式図は次のようになる。



(2) 直線 m は点 $N(0, 0, 1)$ と点 $(p, q, 0)$ を通る。よって直線上の点は、実数 s を用いて $(sp, sq, 1-s)$ と表せる。これが球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上にある条件は $(sp)^2 + (sq)^2 + (1-s)^2 = 1$ である。整理すると $s^2(p^2 + q^2) + 1 - 2s + s^2 = 1$ すなわち $s\{(p^2 + q^2 + 1)s - 2\} = 0$ である。 $s = 0$ は点 N に対応する。したがって点 N 以外の交点では $s = \frac{2}{p^2 + q^2 + 1}$ である。これを直線の式に代入して、求める交点は

$$\left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

である。

(3) 平面 α は点 $(0, 0, 1/2)$ を通り、法線ベクトルが $(3, 4, 5)$ である。したがってその方程式は $3x + 4y + 5(z - \frac{1}{2}) = 0$ すなわち $3x + 4y + 5z = \frac{5}{2}$ である。

点 $Q = (p, q, 0)$ とする。(2) によれば、この Q に対応する球面上の点 $P \neq N$ は

$$\left(\frac{2p}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1}, \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} \right)$$

である。この点が平面 α 上にある条件は

$$3 \cdot \frac{2p}{p^2 + q^2 + 1} + 4 \cdot \frac{2q}{p^2 + q^2 + 1} + 5 \cdot \frac{p^2 + q^2 - 1}{p^2 + q^2 + 1} = \frac{5}{2}$$

である。両辺に $2(p^2 + q^2 + 1)$ を掛けると $12p + 16q + 10(p^2 + q^2 - 1) = 5(p^2 + q^2 + 1)$ である。整理して $5(p^2 + q^2) + 12p + 16q - 15 = 0$ となる。両辺を 5 で割って平方完成すると $p^2 + q^2 + \frac{12}{5}p + \frac{16}{5}q - 3 = 0$ すなわち $(p + \frac{6}{5})^2 + (q + \frac{8}{5})^2 = 7$ である。

よって点 $Q = (p, q, 0)$ は、 xy 平面上の円

$$\left(x + \frac{6}{5} \right)^2 + \left(y + \frac{8}{5} \right)^2 = 7, \quad z = 0$$

の円周上を動く。

逆に、この円周上の任意の $(p, q, 0)$ から (2) の式で定めた点 P は球面 S 上にあり、上の変形を逆にたどれば平面 α 上にもある。したがって得られた円周は必要条件にとどまらず、点 Q の軌跡全体である。

【総評】 難度 6、計算量 5、想定時間 21 分。公式の出題意図は、直線と平面を媒介変数・直交条件で表し、空間図形を正確に解析することにある。(1) は球面上で $c = 1$ なら $P = N$ となるため分母が 0 でない。(2) は北極からの射影の逆公式で、(3) にそのまま使う。平面 $3x + 4y + 5z = 5/2$ への代入後は平方完成して中心 $(-6/5, -8/5, 0)$ 、半径 $\sqrt{7}$ を読む。最後に逆向きも確認し、得た円周が軌跡の必要条件だけでなく十分条件でもあることを明記する。

【第 6 問】

1 辺の長さが 1 の正五角形を K とする。このとき、以下の問いに答えよ。

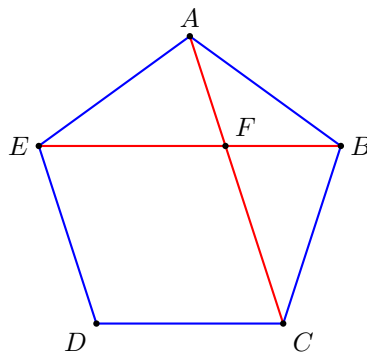
- (1) K の対角線の長さを求めよ。
- (2) K の周で囲まれた図形を P とする。また、 P を K の外接円の中心の周りに各 θ だけ回転して得られる図形を P_θ とする。 P と P_θ の共通部分の周の長さを l_θ とする。 θ が $0^\circ < \theta < 72^\circ$ の範囲を動くとき、 l_θ の最小値が $2\sqrt{5}$ であることを示せ。

【方針】

(1) は正五角形に 2 本の対角線を引き、相似から対角線 d が $d(d-1)=1$ を満たすことを丁寧に導く。(2) は 2 つの正五角形を中心から同距離 ρ にある 10 本の支持直線として捉え、隣り合う法線角の差から共通部分の各辺長と周長を表し、対称な回転角で最小になることを示す。

【解答】

(1) 正五角形を順に A, B, C, D, E とし、対角線 AC, BE の交点を F とする。位置関係は次の図のようになる。



対角線の長さを d とする。正五角形の内角は 108° で、二等辺三角形 ABC 、 ABE の底角はともに 36° である。この角度から $\triangle ABC$ と $\triangle AFB$ は相似である。また $\triangle BCF$ では $\angle CBF = \angle BFC = 72^\circ$ なので、これらの対辺は等しく $CF = BC = 1$ である。したがって

$$AF = AC - CF = d - 1.$$

相似比より

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AF}, \quad \frac{d}{1} = \frac{1}{d-1}.$$

よって $d(d-1)=1$ 、すなわち

$$d^2 - d - 1 = 0.$$

$d > 0$ なので

$$d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

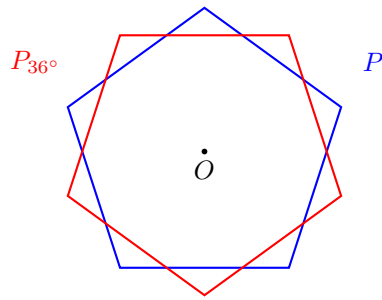
である。

(2) 正五角形の外接円の中心を O 、内接円の半径を ρ とする。中心と辺の中点を結ぶ直角三角形で中心角の半分 36° を用いると

$$\frac{1}{2} = \rho \tan 36^\circ, \quad \rho = \frac{1}{2 \tan 36^\circ}$$

である。

正五角形 P は、中心から距離 ρ にある 5 本の辺の内側の共通部分である。 P_θ も同じ 5 本を θ だけ回したものである。例えば $\theta = 36^\circ$ では次のように辺の方向が交互に並ぶ。



$0^\circ < \theta < 72^\circ$ では 10 本の外向き法線方向が交互に並び、隣り合う方向の角度差は

$$\theta, \quad 72^\circ - \theta, \quad \theta, \quad 72^\circ - \theta, \dots$$

となる。中心から距離 ρ にある 1 辺について、左右の隣の法線との角度差を u, v とすると、垂線の足から両端までの長さはそれぞれ $\rho \tan(u/2)$ 、 $\rho \tan(v/2)$ である。したがって各辺の長さは

$$\rho \left\{ \tan \frac{u}{2} + \tan \frac{v}{2} \right\}.$$

今回の 10 辺では u, v が $\theta, 72^\circ - \theta$ の組なので

$$l_\theta = 10\rho \left\{ \tan \frac{\theta}{2} + \tan \frac{72^\circ - \theta}{2} \right\}.$$

$$u = \frac{\theta}{2}, \quad v = \frac{72^\circ - \theta}{2}$$

とおけば $u + v = 36^\circ$ である。加法定理より

$$\tan u + \tan v = \frac{\sin 36^\circ}{\cos u \cos v}.$$

また

$$\cos u \cos v = \frac{\cos 36^\circ + \cos(u - v)}{2} \leq \frac{\cos 36^\circ + 1}{2}.$$

したがって

$$\tan u + \tan v \geq 2 \tan 18^\circ,$$

等号は $u = v = 18^\circ$ 、すなわち $\theta = 36^\circ$ のときに成り立つ。よって

$$l_\theta \geq 20\rho \tan 18^\circ = 10 \frac{\tan 18^\circ}{\tan 36^\circ}.$$

(1) の対角線は、外接円の弦の長さの比から $d = 2 \cos 36^\circ$ でもある。したがって

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

さらに

$$\frac{\tan 36^\circ}{\tan 18^\circ} = \frac{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 36^\circ \sin 18^\circ} = \frac{2 \cos^2 18^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{1 + \cos 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \sqrt{5}.$$

ゆえに

$$l_\theta \geq \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

等号を与える $\theta = 36^\circ$ は指定範囲内にあるので、最小値は

$$2\sqrt{5}$$

である。

【総評】 難度 8、計算量 6、想定時間 32 分。公式の出題意図は、正五角形を題材に自分で解法を設定し、図形の対称性を数式へ移す力を測ることにある。(1) は数値だけでなく、相似する三角形と $CF = 1$ を明示して $d(d - 1) = 1$ を導く。(2) は共通部分を 10 本の支持直線で囲まれる接多角形と見れば、法線角の差が θ と $72^\circ - \theta$ で交互に現れる。加法定理で $\theta = 36^\circ$ の対称配置が最小と示し、最後の $\tan 36^\circ / \tan 18^\circ = \sqrt{5}$ も (1) の対角線から省略せず導く。