

東北大学 2026 年度 文系

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面上の放物線 $y = x^2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 u に対し、放物線 C の接線で点 $(u, u - 1)$ を通るものがちょうど 2 本あることを示せ。
- (2) 正の実数 u に対し、放物線 C の相異なる 2 本の接線で点 $(u, u - 1)$ を通るものを l_1, l_2 とする。放物線 C と直線 l_1 の接点を P_1 とし、放物線 C と直線 l_2 の接点を P_2 とする。このとき、線分 P_1P_2 の垂直二等分線 m は y 軸と交わることを示せ。また、 u が正の実数全体を動くとき、直線 m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ の最小値と、それを与える u の値を求めよ。

【方針】

放物線上の接点を (v, v^2) とおくと、その点での接線は $y = 2vx - v^2$ で表される。点 $(u, u - 1)$ を通る条件から、接点の x 座標が満たす 2 次方程式を作り、2 つの接点の座標を根と係数の関係で扱う。接点を直接求める必要はなく、和と積だけで線分の傾きと中点が計算できる。最後に、垂直二等分線の y 軸との交点 $q(u)$ を u の 2 次式として表し、平方完成で最小値を求める。

【解答】

(1) 放物線 $y = x^2$ 上の点を (v, v^2) とする。この点における接線は、 $y = 2v(x - v) + v^2 = 2vx - v^2$ である。この接線が点 $(u, u - 1)$ を通るための条件は $u - 1 = 2uv - v^2$ すなわち $v^2 - 2uv + u - 1 = 0$ である。

この 2 次方程式の判別式は

$$(-2u)^2 - 4(u - 1) = 4(u^2 - u + 1) = 4 \left\{ \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\} > 0$$

であるから、この方程式は相異なる 2 実根をもつ。各根 v に対して接線 $y = 2vx - v^2$ が一意に定まり、相異なる根からは傾きの異なる接線が得られる。したがって、条件を満たす接線はちょうど 2 本である。

(2) 2 つの根を v_1, v_2 とおくと、根と係数の関係より $v_1 + v_2 = 2u$, $v_1v_2 = u - 1$ である。

2 つの接点を $P_1 = (v_1, v_1^2)$, $P_2 = (v_2, v_2^2)$ とする。線分 P_1P_2 の傾きは $\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1 - v_2} = v_1 + v_2 = 2u$ である。したがって、その垂直二等分線の傾きは $-\frac{1}{2u}$ である。ここで $u > 0$ なので、この値は定義できる。

次に、線分 P_1P_2 の中点を M とする。中点の座標は $M = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}\right)$ であり、 $\frac{v_1 + v_2}{2} = u$ また

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} = \frac{(v_1 + v_2)^2 - 2v_1v_2}{2} = \frac{4u^2 - 2(u - 1)}{2} = 2u^2 - u + 1$$

である。よって $M = (u, 2u^2 - u + 1)$ である。

垂直二等分線は点 M を通り、傾き $-1/(2u)$ をもつので、 $y - (2u^2 - u + 1) = -\frac{1}{2u}(x - u)$ と表される。この直線と y 軸との交点では $x = 0$ であるから、その y 座標を $q(u)$ とすると $q(u) = 2u^2 - u + 1 + \frac{1}{2} = 2u^2 - u + \frac{3}{2}$ である。

これを平方完成すると、 $q(u) = 2\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{8}$ となる。条件 $u > 0$ の範囲に $u = 1/4$ は含まれる。したがって、 $q(u)$ の最小値は $\frac{11}{8}$ であり、それを与えるのは $u = \frac{1}{4}$ である。

【総評】 難易度は 5/10 の標準問題で、文系・理系ともに 12~15 分で完答したい必答級である。(1) は接点を v とおいた接線の式、判別式が常に正であること、相異なる根が相異なる接線を与えることが主な採点点になる。(2) は根と係数の関係から P_1P_2 の傾きと中点を出し、 $u > 0$ により垂直二等分線の傾きが有限で y 軸と交わることを確認してから切片を最小化する。点 $(u, u - 1)$ 自体を接点と思い込むこと、判別式の正値を図だけで済ませること、最後に定義域 $u > 0$ を確認しないことが典型的な失点である。

【第 2 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) を 1 つ求めよ。なお、解答は答えのみでよい。
- (2) $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) は無数に存在することを示せ。
- (3) 正の整数の組 (a, b, c) は $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たすとする。このとき、 $a + c$ および b は偶数であることを示せ。さらに、もし a と c が偶数ならば b は 4 の倍数であることを示せ。

【方針】

(1) は 1 組の正整数解を見つければよい。(2) はその解を正整数倍すれば、等式の両辺が同じ倍率の 2 乗倍になり、無限個の解が得られる。(3) では、まず a と c の偶奇が一致することを確認する。ついで a, c が奇数の場合と偶数の場合を分けて、いずれも b が偶数であることを示す。さらに a, c が偶数なら 3 つの数を 2 で割った組も同じ形の方程式を満たすので、その組に同じ偶奇の結論をもう一度適用して b が 4 の倍数であることを導く。

【解答】

(1) たとえば $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3$ とすると、 $a^2 + 2b^2 = 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 1 + 8 = 9 = 3^2 = c^2$ である。したがって、 $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ は条件を満たす。

(2) (1) の解を正整数 m 倍して $(a, b, c) = (m, 2m, 3m)$ とおく。このとき $a^2 + 2b^2 = m^2 + 2(2m)^2 = m^2 + 8m^2 = 9m^2 = (3m)^2 = c^2$ である。 $m = 1, 2, 3, \dots$ と変えると互いに異なる正整数解が得られるので、条件を満たす正整数の組は無数に存在する。

(3) まず、等式 $a^2 + 2b^2 = c^2$ を 2 で割った余りで考える。平方数は 2 で割ると 0 または 1 であり、 $2b^2$ は常に偶数である。したがって $a^2 \equiv c^2 \pmod{2}$ であり、 a と c の偶奇は一致する。ゆえに $a + c$ は偶数である。 a, c が奇数であるとする。奇数の平方は 4 で割ると 1 余るので、 $a^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{4}$ である。もとの等式より $2b^2 = c^2 - a^2$ であり、右辺は 4 で割り切れる。よって $2b^2$ は 4 で割り切れ、 b^2 は偶数である。したがって b は偶数である。

次に、 a, c が偶数であるとする。この場合も $2b^2 = c^2 - a^2$ であり、右辺は偶数の平方どうしの差だから 4 で割り切れる。よって $2b^2$ は 4 で割り切れ、 b^2 は偶数、したがって b は偶数である。

以上より、 a, c の偶奇にかかわらず、条件を満たす正整数解では b は偶数である。

ここで、 a, c がともに偶数であると仮定する。上で示したことから b も偶数である。そこで $a = 2a_1, \quad b = 2b_1, \quad c = 2c_1$ とおくと、 a_1, b_1, c_1 は正整数であり、もとの等式は $(2a_1)^2 + 2(2b_1)^2 = (2c_1)^2$ すなわち $a_1^2 + 2b_1^2 = c_1^2$ となる。この新しい正整数解 (a_1, b_1, c_1) に対して、すでに示した結論を適用すると、 b_1 は偶数である。したがって $b = 2b_1$ は 4 の倍数である。

【総評】 難易度は 5/10 の標準的な整数証明で、10～15 分を目安に完答したい必答級である。(1) の具体例、(2) の正整数倍による無限族、(3) の $a + c$ の偶数性、 b の偶数性、さらに 4 の倍数まで進める議論がそれぞれ独立した採点点になる。とくに後半は a, c, b を 2 で割った新しい組も同じ方程式を満たすため、すでに示した「第 2 成分は偶数」を再適用できることが核心である。作った無限族だけを調べて一般の組を証明したつもりになること、「 $a + c$ および b が偶数」の否定を誤ること、 b が偶数までで止めることに注意する。

【第 3 問】

平面上の三角形 OAB において $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおき、次が成り立つとする。

$$|\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{5}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

ただし、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。 s, t は $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数とし、辺 OA を $s : (1-s)$ に内分する点を D 、辺 OB を $t : (1-t)$ に内分する点を E とする。また、線分 AE と線分 BD の交点を F とし、これら 2 つの線分は点 F において直交しているとする。以下の問いに答えよ。

- (1) t を s を用いて表せ。また、 s のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ および s を用いて表せ。
- (3) 平面上の点 P で

$$|\overrightarrow{OP}|^2 + 2\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$$

を満たすものの全体が半径 3 の円をなすための必要十分条件を $\overrightarrow{OF}, \vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。また、この必要十分条件が成り立つとき、 s の値を求めよ。

【方針】

直線 AE と BD の方向ベクトルをそれぞれ $t\vec{b} - \vec{a}$, $s\vec{a} - \vec{b}$ と表す。直交条件はこれらの内積が 0 であることなので、まず s, t の関係式を得る。交点 F は、 AE 上の点と BD 上の点を係数つきで等置して求める。最後の軌跡条件は、点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とし、式を平方完成して円の中心と半径を読み取る。半径が 3 である条件は、 $\overrightarrow{OF} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$ に帰着する。

【解答】

- (1) 点 D, E の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OD} = s\vec{a}, \quad \overrightarrow{OE} = t\vec{b}$$

である。直線 AE の方向ベクトルは $t\vec{b} - \vec{a}$ であり、直線 BD の方向ベクトルは $s\vec{a} - \vec{b}$ である。2 直線が直交するので、これらの内積は 0 である。したがって $(t\vec{b} - \vec{a}) \cdot (s\vec{a} - \vec{b}) = 0$ である。

与えられた条件

$$|\vec{a}|^2 = 2, \quad |\vec{b}|^2 = 5, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

を用いると、

$$(t\vec{b} - \vec{a}) \cdot (s\vec{a} - \vec{b}) = st(\vec{a} \cdot \vec{b}) - t|\vec{b}|^2 - s|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}$$

より $st - 5t - 2s + 1 = 0$ となる。これを t について解くと $t(s - 5) = 2s - 1$ であるから、 $t = \frac{1-2s}{5-s}$ を得る。

条件 $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を調べる。 $0 < s < 1$ では $5 - s > 0$ であるから、 $t > 0$ となる条件は $1 - 2s > 0$ すなわち $0 < s < \frac{1}{2}$ である。またこの範囲では $0 < 1 - 2s < 5 - s$ が成り立つので $t < 1$ も満たされる。よって求める s の範囲は $0 < s < \frac{1}{2}$ である。

- (2) 交点 F を直線 AE 上で $\overrightarrow{OF} = (1-\lambda)\vec{a} + \lambda t\vec{b}$ と表す。また直線 BD 上で $\overrightarrow{OF} = (1-\mu)\vec{b} + \mu s\vec{a}$ と表す。 $\vec{a}, \vec{b}$ は三角形を作る 2 辺のベクトルなので一次独立であり、係数を比較できる。よって $1-\lambda = \mu s$, $\lambda t = 1-\mu$ である。

ここで $0 < s, t < 1$ より $1 - st > 0$ である。これを解くと、 $\lambda = \frac{1-s}{1-st}$, $\mu = \frac{1-t}{1-st}$ となる。したがって

$$\overrightarrow{OF} = \frac{s(1-t)}{1-st}\vec{a} + \frac{t(1-s)}{1-st}\vec{b}$$

である。

ここに $t = \frac{1-2s}{5-s}$ を代入する。まず $1-t = 1 - \frac{1-2s}{5-s} = \frac{4+s}{5-s}$, また

$$1-st = 1 - s \frac{1-2s}{5-s} = \frac{5-s-s+2s^2}{5-s} = \frac{2s^2-2s+5}{5-s}$$

である。よって $\vec{a}$ の係数は $\frac{s(1-t)}{1-st} = \frac{s(s+4)}{2s^2-2s+5}$ である。

同様に $\vec{b}$ の係数は

$$\frac{t(1-s)}{1-st} = \frac{(1-2s)(1-s)}{2s^2-2s+5} = \frac{(s-1)(2s-1)}{2s^2-2s+5}$$

である。したがって

$$\overrightarrow{OF} = \frac{s(s+4)}{2s^2-2s+5}\mathbf{a} + \frac{(s-1)(2s-1)}{2s^2-2s+5}\mathbf{b}$$

である。

(3) 点 P の位置ベクトルを $\mathbf{p}$ とする。条件式

$$|\overrightarrow{OP}|^2 + 2\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{AB} = 4$$

をベクトルで書き直す。ここで

$$\overrightarrow{FP} = \mathbf{p} - \overrightarrow{OF}, \quad \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

であるから、

$$|\mathbf{p}|^2 + 2(\mathbf{p} - \overrightarrow{OF}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 4$$

となる。すなわち

$$|\mathbf{p}|^2 + 2\mathbf{p} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 4 + 2\overrightarrow{OF} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

である。左辺を平方完成すると

$$|\mathbf{p} + \mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = 4 + 2\overrightarrow{OF} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

である。

ここで

$$|\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2 = 5 - 2 + 2 = 5$$

だから、軌跡は

$$|\mathbf{p} + \mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = 9 + 2\overrightarrow{OF} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

と表される。したがって、この軌跡が半径 3 の円であるための必要条件は $9 + 2\overrightarrow{OF} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 9$ 、すなわち $\overrightarrow{OF} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$ である。逆にこの内積が 0 ならば軌跡の式は $|\mathbf{p} + \mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = 9$ となり、中心 $-\mathbf{b} + \mathbf{a}$ 、半径 3 の円を表す。よって必要十分条件は $\overrightarrow{OF} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$ である。

(2) の結果を $\overrightarrow{OF} = A\mathbf{a} + B\mathbf{b}$ とおく。ただし $A = \frac{s(s+4)}{2s^2-2s+5}$, $B = \frac{(s-1)(2s-1)}{2s^2-2s+5}$ である。このとき

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 1 - 2 = -1, \quad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 5 - 1 = 4$$

だから、 $\overrightarrow{OF} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = -A + 4B$ である。よって $-A + 4B = \frac{-s(s+4) + 4(s-1)(2s-1)}{2s^2-2s+5}$ であり、分子を整理すると $-s^2 - 4s + 8s^2 - 12s + 4 = 7s^2 - 16s + 4 = (s-2)(7s-2)$ となる。したがって

$$\overrightarrow{OF} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{(s-2)(7s-2)}{2s^2-2s+5}$$

である。

分母は $2s^2 - 2s + 5 = 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} > 0$ であるから、条件は $(s-2)(7s-2) = 0$ である。(1) で得た範囲 $0 < s < 1/2$ に入るのは $s = \frac{2}{7}$ だけである。

【総評】 難易度は 7/10 で、文系では 25~30 分を見込む差がつく問題である。(1)(2) は確保したい標準部分、(3) が完答者を分ける。採点上は、直線 AE, BD の方向ベクトルと直交条件、 $0 < t < 1$ を含む s の範囲、交点 F の 2 通りの表示、軌跡の平方完成、半径 3 となる条件の必要性と十分性、最後の s の範囲確認が要点になる。 $1-st \neq 0$ を断らずに割ること、半径の二乗だけを合わせて逆向きを書かないこと、 $s=2$ を範囲確認せず残すことが典型的な失点である。時間が厳しければまず (1)(2) を答案化し、(3) は平方完成までを部分点として残したい。

【第 4 問】

関数 $f(x) = x^4 - x^2$ を考える。座標平面において、 x 軸と平行な直線 l は曲線 $y = f(x)$ 上の相異なる 2 点における接線であるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ の極値を求め、 $y = f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) 直線 l の方程式を求めよ。なお、解答は答えのみでよい。
- (3) 直線 l と異なる直線 m は曲線 $y = f(x)$ とちょうど 2 つの共有点をもち、かつ x 軸と平行であるとする。直線 l と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる部分の面積を S とし、直線 m と曲線 $y = f(x)$ で囲まれる部分の面積を T とするとき、 $\frac{T}{S} > \sqrt{2}$ が成り立つことを示せ。

【方針】

まず $f'(x)$ を調べ、グラフの概形と水平な接線を求める。2 点で接する水平線は左右対称な極小点を通る直線である。面積 S は偶関数性を利用して半分を積分する。もう一つの水平線 $m: y = h$ がグラフとちょうど 2 点で交わる条件は、 $h > 0$ と表せる。このとき交点の正の x 座標を α とおくと、 $h = \alpha^4 - \alpha^2$ であり、面積 T を α の式で表せる。最後に $\alpha > 1$ を使って T の下限を評価し、 S と比較する。

【解答】

(1) 関数 $f(x) = x^4 - x^2$ の導関数は $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$ である。したがって停留点は $x = 0, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。それぞれの値は

$$f(0) = 0, \quad f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

である。

導関数の符号は、 $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ で負、 $(-1/\sqrt{2}, 0)$ で正、 $(0, 1/\sqrt{2})$ で負、 $(1/\sqrt{2}, \infty)$ で正である。また $f(x)$ は偶関数で、 $x = -1, 0, 1$ で x 軸と交わり、 $|x| \rightarrow \infty$ で $f(x) \rightarrow \infty$ となる。したがってグラフは y 軸対称で、 $(0, 0)$ で極大値 0 を、 $x = \pm 1/\sqrt{2}$ で極小値 $-1/4$ をとる W 字形である。

(2) 2 つの異なる点で接する水平な直線は、2 つの極小点を通る直線であるから、 $l: y = -\frac{1}{4}$ である。

(3) まず、直線 l とグラフで囲まれる部分は、 $-1/\sqrt{2} \leq x \leq 1/\sqrt{2}$ にある。この区間では $f(x) + \frac{1}{4} = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = (x^2 - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ であり、面積 S は

$$S = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(f(x) + \frac{1}{4} \right) dx$$

である。偶関数性を用いると

$$S = 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{4} \right) dx$$

である。計算すると $S = 2 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x}{4} \right]_0^{1/\sqrt{2}}$ であり、 $r = 1/\sqrt{2}$ とおくと $r^3 = r/2$ 、 $r^5 = r/4$ だから

$$S = 2 \left(\frac{r}{20} - \frac{r}{6} + \frac{r}{4} \right) = 2r \left(\frac{3}{60} - \frac{10}{60} + \frac{15}{60} \right) = \frac{4r}{15} = \frac{2\sqrt{2}}{15}$$

となる。したがって $S = \frac{2\sqrt{2}}{15}$ である。

次に、直線 m を $m: y = h$ とおく。方程式 $x^4 - x^2 = h$ がちょうど 2 つの実数解をもつ条件を考える。グラフの概形より、 $h > 0$ のとき、左右対称に 2 つの交点だけが現れる。逆に $-1/4 < h < 0$ では 4 点、 $h = 0$ では 3 点、 $h = -1/4$ では接点を含めて 2 点だがその直線はすでに l である。ここでは m は l とは異なるもう一つの水平線なので、対象となるのは $h > 0$ である。

正の交点の x 座標を α とする。このとき $h > 0$ だから $\alpha > 1$ であり、 $h = f(\alpha) = \alpha^4 - \alpha^2$ である。直線 m とグラフで囲まれる面積を T とすると、対称性より

$$T = 2 \int_0^{\alpha} \{h - f(x)\} dx$$

である。 $h = \alpha^4 - \alpha^2$ を代入して

$$T = 2 \int_0^{\alpha} (\alpha^4 - \alpha^2 - x^4 + x^2) dx$$

となる。よって

$$T = 2 \left[(\alpha^4 - \alpha^2)x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha$$

であり,

$$T = 2 \left(\alpha^5 - \alpha^3 - \frac{\alpha^5}{5} + \frac{\alpha^3}{3} \right) = 2 \left(\frac{4}{5}\alpha^5 - \frac{2}{3}\alpha^3 \right) = \frac{4}{15}\alpha^3(6\alpha^2 - 5)$$

である。 $\alpha > 1$ であるから、 $\alpha^3(6\alpha^2 - 5) > 1 \cdot (6 - 5) = 1$ である。したがって $T > \frac{4}{15}$ である。一方、上で求めた S より $\sqrt{2}S = \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{15} = \frac{4}{15}$ である。よって $T > \sqrt{2}S$ が成り立つ。

【総評】 難易度は 6/10 で、20～25 分を目安とする標準～やや難の微積分問題である。(1)(2) は必ず確保し、(3) の面積評価が差になる。採点点は導関数の符号を反映したグラフ、2 つの極小点に共通する接線 l 、偶関数性を使った S の積分、 $m: y = h$ がちょうど 2 交点をもつ条件 $h > 0$ 、交点 $\alpha > 1$ による T の表示、最後の厳密不等式である。 $h = 0$ の 3 交点や $h = -1/4$ の除外を落とすこと、 S, T で上下を逆にすること、 $\alpha > 1$ から得る不等号を等号にしてしまうことが典型的な失点になる。計算は S と T を別々に整理し、最後に $\sqrt{2}S = 4/15$ と比較すると安定する。