

東北大学 2026 年度 理系

解答

全 6 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標平面上の放物線 $y = x^2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 正の実数 u に対し、放物線 C の接線で点 $(u, u - 1)$ を通るものがちょうど 2 本あることを示せ。
- (2) 正の実数 u に対し、放物線 C の相異なる 2 本の接線で点 $(u, u - 1)$ を通るものを l_1, l_2 とする。放物線 C と直線 l_1 の接点を P_1 とし、放物線 C と直線 l_2 の接点を P_2 とする。このとき、線分 P_1P_2 の垂直二等分線 m は y 軸と交わることを示せ。また、 u が正の実数全体を動くとき、直線 m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ の最小値と、それを与える u の値を求めよ。

【方針】

放物線上の接点を (v, v^2) とおくと、その点での接線は $y = 2vx - v^2$ で表される。点 $(u, u - 1)$ を通る条件から、接点の x 座標が満たす 2 次方程式を作り、2 つの接点の座標を根と係数の関係で扱う。接点を直接求める必要はなく、和と積だけで線分の傾きと中点が計算できる。最後に、垂直二等分線の y 軸との交点 $q(u)$ を u の 2 次式として表し、平方完成で最小値を求める。

【解答】

(1) 放物線 $y = x^2$ 上の点を (v, v^2) とする。この点における接線は、 $y = 2v(x - v) + v^2 = 2vx - v^2$ である。この接線が点 $(u, u - 1)$ を通るための条件は $u - 1 = 2uv - v^2$ すなわち $v^2 - 2uv + u - 1 = 0$ である。

この 2 次方程式の判別式は

$$(-2u)^2 - 4(u - 1) = 4(u^2 - u + 1) = 4 \left\{ \left(u - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\} > 0$$

であるから、この方程式は相異なる 2 実根をもつ。各根 v に対して接線 $y = 2vx - v^2$ が一意に定まり、相異なる根からは傾きの異なる接線が得られる。したがって、条件を満たす接線はちょうど 2 本である。

(2) 2 つの根を v_1, v_2 とおくと、根と係数の関係より $v_1 + v_2 = 2u$, $v_1v_2 = u - 1$ である。

2 つの接点を $P_1 = (v_1, v_1^2)$, $P_2 = (v_2, v_2^2)$ とする。線分 P_1P_2 の傾きは $\frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1 - v_2} = v_1 + v_2 = 2u$ である。したがって、その垂直二等分線の傾きは $-\frac{1}{2u}$ である。ここで $u > 0$ なので、この値は定義できる。

次に、線分 P_1P_2 の中点を M とする。中点の座標は $M = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}, \frac{v_1^2 + v_2^2}{2} \right)$ であり、 $\frac{v_1 + v_2}{2} = u$ また

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{2} = \frac{(v_1 + v_2)^2 - 2v_1v_2}{2} = \frac{4u^2 - 2(u - 1)}{2} = 2u^2 - u + 1$$

である。よって $M = (u, 2u^2 - u + 1)$ である。

垂直二等分線は点 M を通り、傾き $-1/(2u)$ をもつので、 $y - (2u^2 - u + 1) = -\frac{1}{2u}(x - u)$ と表される。この直線と y 軸との交点では $x = 0$ であるから、その y 座標を $q(u)$ とすると $q(u) = 2u^2 - u + 1 + \frac{1}{2} = 2u^2 - u + \frac{3}{2}$ である。

これを平方完成すると、 $q(u) = 2 \left(u - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{11}{8}$ となる。条件 $u > 0$ の範囲に $u = 1/4$ は含まれる。したがって、 $q(u)$ の最小値は $\frac{11}{8}$ であり、それを与えるのは $u = \frac{1}{4}$ である。

【総評】 難易度は 5/10 の標準問題で、文系・理系ともに 12~15 分で完答したい必答級である。(1) は接点を v とおいた接線の式、判別式が常に正であること、相異なる根が相異なる接線を与えることが主な採点点になる。(2) は根と係数の関係から P_1P_2 の傾きと中点を出し、 $u > 0$ により垂直二等分線の傾きが有限で y 軸と交わることを確認してから切片を最小化する。点 $(u, u - 1)$ 自体を接点と思い込むこと、判別式の正値を図だけで済ませること、最後に定義域 $u > 0$ を確認しないことが典型的な失点である。

【第 2 問】

以下の問いに答えよ。

- (1) $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) を 1 つ求めよ。なお、解答は答えのみでよい。
- (2) $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) は無数に存在することを示せ。
- (3) 正の整数の組 (a, b, c) は $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たすとする。このとき、 $a + c$ および b は偶数であることを示せ。さらに、もし a と c が偶数ならば b は 4 の倍数であることを示せ。

【方針】

(1) は 1 組の正整数解を見つければよい。(2) はその解を正整数倍すれば、等式の両辺が同じ倍率の 2 乗倍になり、無限個の解が得られる。(3) では、まず a と c の偶奇が一致することを確認する。ついで a, c が奇数の場合と偶数の場合を分けて、いずれも b が偶数であることを示す。さらに a, c が偶数なら 3 つの数を 2 で割った組も同じ形の方程式を満たすので、その組に同じ偶奇の結論をもう一度適用して b が 4 の倍数であることを導く。

【解答】

(1) たとえば $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3$ とすると、 $a^2 + 2b^2 = 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 1 + 8 = 9 = 3^2 = c^2$ である。したがって、 $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ は条件を満たす。

(2) (1) の解を正整数 m 倍して $(a, b, c) = (m, 2m, 3m)$ とおく。このとき $a^2 + 2b^2 = m^2 + 2(2m)^2 = m^2 + 8m^2 = 9m^2 = (3m)^2 = c^2$ である。 $m = 1, 2, 3, \dots$ と変えると互いに異なる正整数解が得られるので、条件を満たす正整数の組は無数に存在する。

(3) まず、等式 $a^2 + 2b^2 = c^2$ を 2 で割った余りで考える。平方数は 2 で割ると 0 または 1 であり、 $2b^2$ は常に偶数である。したがって $a^2 \equiv c^2 \pmod{2}$ であり、 a と c の偶奇は一致する。ゆえに $a + c$ は偶数である。 a, c が奇数であるとする。奇数の平方は 4 で割ると 1 余るので、 $a^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{4}$ である。もとの等式より $2b^2 = c^2 - a^2$ であり、右辺は 4 で割り切れる。よって $2b^2$ は 4 で割り切れ、 b^2 は偶数である。したがって b は偶数である。

次に、 a, c が偶数であるとする。この場合も $2b^2 = c^2 - a^2$ であり、右辺は偶数の平方どうしの差だから 4 で割り切れる。よって $2b^2$ は 4 で割り切れ、 b^2 は偶数、したがって b は偶数である。

以上より、 a, c の偶奇にかかわらず、条件を満たす正整数解では b は偶数である。

ここで、 a, c がともに偶数であると仮定する。上で示したことから b も偶数である。そこで $a = 2a_1, \quad b = 2b_1, \quad c = 2c_1$ とおくと、 a_1, b_1, c_1 は正整数であり、もとの等式は $(2a_1)^2 + 2(2b_1)^2 = (2c_1)^2$ すなわち $a_1^2 + 2b_1^2 = c_1^2$ となる。この新しい正整数解 (a_1, b_1, c_1) に対して、すでに示した結論を適用すると、 b_1 は偶数である。したがって $b = 2b_1$ は 4 の倍数である。

【総評】 難易度は 5/10 の標準的な整数証明で、10～15 分を目安に完答したい必答級である。(1) の具体例、(2) の正整数倍による無限族、(3) の $a + c$ の偶数性、 b の偶数性、さらに 4 の倍数まで進める議論がそれぞれ独立した採点点になる。とくに後半は a, c, b を 2 で割った新しい組も同じ方程式を満たすため、すでに示した「第 2 成分は偶数」を再適用できることが核心である。作った無限族だけを調べて一般の組を証明したつもりになること、「 $a + c$ および b が偶数」の否定を誤ること、 b が偶数までで止めることに注意する。

【第 3 問】

a, b, c, d は実数とし、実数全体を定義域とする関数

$$f(x) = \begin{cases} 8x^3 - 6x^2 + 2 & (|x| \leq 1 \text{ のとき}) \\ 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

はすべての x の値で微分可能であるとする。以下の問いに答えよ。

- (1) a, b, c, d の値を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の最小値と、それを与える x の値を求めよ。

【方針】

$f(x)$ がすべての実数で微分可能であるためには、つなぎ目 $x = 1, -1$ で関数の値と導関数の値が一致する必要がある。この 4 条件から a, b, c, d を決定する。最小値は区間 $-1 \leq x \leq 1$ と外側 $|x| > 1$ に分けて調べる。内側は 3 次式、外側は 4 次式なので、それぞれ導関数の符号または臨界点を調べ、候補の値を比較する。

【解答】

(1) $-1 \leq x \leq 1$ での式を $p(x) = 8x^3 - 6x^2 + 2$ とおき、 $|x| > 1$ での式を $q(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく。 $f(x)$ がすべての実数で微分可能であるためには、 $x = 1$ と $x = -1$ で値と導関数が一致しなければならない。

まず $p(1) = 8 - 6 + 2 = 4$, $p'(x) = 24x^2 - 12x$, $p'(1) = 12$ である。また $p(-1) = -8 - 6 + 2 = -12$, $p'(-1) = 24 + 12 = 36$ である。

一方、 $q'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$ である。したがって接続条件は $q(1) = p(1)$, $q'(1) = p'(1)$, $q(-1) = p(-1)$, $q'(-1) = p'(-1)$ であり、具体的には

$$\begin{cases} 3 + a + b + c + d = 4, \\ 12 + 3a + 2b + c = 12, \\ 3 - a + b - c + d = -12, \\ -12 + 3a - 2b + c = 36 \end{cases}$$

である。整理すると

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1, \\ 3a + 2b + c = 0, \\ -a + b - c + d = -15, \\ 3a - 2b + c = 48 \end{cases}$$

となる。第 2 式と第 4 式の差をとると $4b = -48$ だから $b = -12$ である。第 2 式より $3a - 24 + c = 0$ すなわち $c = 24 - 3a$ である。第 1 式と第 3 式の差をとると $2a + 2c = 16$ だから $a + c = 8$ である。ここに $c = 24 - 3a$ を代入して $a + 24 - 3a = 8$ より $a = 8$, $c = 0$ を得る。最後に第 1 式から $8 - 12 + 0 + d = 1$ であるから $d = 5$ である。よって $a = 8$, $b = -12$, $c = 0$, $d = 5$ である。

(2) このとき外側の式は $q(x) = 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 5$ である。最小値を求める。

まず $-1 \leq x \leq 1$ では $p'(x) = 24x^2 - 12x = 12x(2x - 1)$ である。臨界点は $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ であり、端点も含めて値を調べると

$$p(-1) = -12, \quad p(0) = 2, \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{8} - 6 \cdot \frac{1}{4} + 2 = \frac{3}{2}, \quad p(1) = 4$$

である。したがって内側での最小値は -12 である。

次に $|x| > 1$ では $q'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 24x = 12x(x^2 + 2x - 2)$ である。方程式 $q'(x) = 0$ の解は $x = 0$, $x = -1 \pm \sqrt{3}$ である。このうち $|x| > 1$ に入るのは $x = -1 - \sqrt{3}$ だけである。さらに $q'(x)$ は $(-\infty, -1 - \sqrt{3})$ で負、 $(-1 - \sqrt{3}, -1)$ で正、 $(1, \infty)$ で正である。したがって外側の左の区間では $x = -1 - \sqrt{3}$ が最小点であり、右の区間では単調増加である。

また、 $q(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \pm\infty$) であり、外側の区間で最小値の候補になるのは、つなぎ目の値とこの臨界点の値である。つなぎ目では $q(1) = 4$, $q(-1) = -12$ である。 $r = \sqrt{3}$ とおき、 $x = -1 - r$ とする。臨界点では $x^2 + 2x - 2 = 0$ だから $x^2 = -2x + 2$ である。これを用いて高次の項を下げると、 $x^3 = x(-2x + 2) = -2x^2 + 2x = -2(-2x + 2) + 2x = 6x - 4$ さらに $x^4 = x(6x - 4) = 6x^2 - 4x = 6(-2x + 2) - 4x = -16x + 12$ である。したがって $q(x) = 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 5$ に代入すると、 $q(x) = 3(-16x + 12) + 8(6x - 4) - 12(-2x + 2) + 5$ であり、 $q(x) = (-48x + 36) + (48x - 32) + (24x - 24) + 5 = 24x - 15$ となる。 $x = -1 - \sqrt{3}$ なので $q(-1 - \sqrt{3}) = 24(-1 - \sqrt{3}) - 15 = -39 - 24\sqrt{3}$ である。

これは -12 より小さい。よって $f(x)$ の最小値は $-39 - 24\sqrt{3}$ であり、そのときの x は $x = -1 - \sqrt{3}$ である。

【総評】 難易度は 5/10 の標準問題で、15~20 分で完答したい必答級である。(1) では $x = \pm 1$ の両方で関数値と導関数値を一致させる 4 条件が採点の中心になる。(2) では内側 $[-1, 1]$ と外側 $(-\infty, -1), (1, \infty)$ を分け、各区間の端点・停留点・無限遠を漏れなく比較することが必要である。外側の停留点では $x^2 + 2x - 2 = 0$ を使って x^3, x^4 を 1 次式に落とすと値の計算が安定する。接続点の値を比較から外すこと、定義域外の根 $-1 + \sqrt{3}$ を候補に残すこと、停留値を出しただけで最小と断定することが典型的な失点である。

【第 4 問】

座標平面において、 x 座標も y 座標も整数である点全体の集合上を移動する点 P がある。時刻 0 に点 P は原点 O にある。0 以上の整数 t に対し、時刻 t に点 P が点 (m, n) にあるとき、時刻 $t+1$ での点 P の位置は 4 点

$$(m+1, n), (m-1, n), (m, n+1), (m, n-1)$$

のいずれかであり、また、どの位置にある確率も $\frac{1}{4}$ である。以下の問いに答えよ。

- (1) 時刻 8 に点 P が点 $(4, 0)$ にある確率を求めよ。
- (2) 時刻 8 に点 P が双曲線 $x^2 - y^2 = 16$ 上にある確率を求めよ。
- (3) 時刻 8 に点 P が双曲線 $x^2 - y^2 = 16$ 上にあるとき、時刻 1, 時刻 2, $\dots$, 時刻 7 のいずれかに点 P が点 $(4, 2)$ にある条件付き確率を求めよ。

【方針】

8 回の移動後の座標は、右左上下の回数を R, L, U, D とおくと $x = R - L$, $y = U - D$, $R + L + U + D = 8$ で表される。各到達点への経路数は多項係数 $8!/(R!L!U!D!)$ で数える。(1) は目的地 $(4, 0)$ への経路数を直接求める。(2) は 8 歩で到達でき、かつ $x^2 - y^2 = 16$ を満たす格子点を列挙して経路数を合計する。(3) は条件付き確率なので、(2) の経路のうち途中で $(4, 2)$ を通るものを数える。8 歩で双曲線に到達する途中で $(4, 2)$ にいる時刻は 6 回目に限られる点を使う。

【解答】

各移動で右、左、上、下のいずれかに 1 だけ進む。8 回の移動におけるそれぞれの回数を R, L, U, D とすると、 $R + L + U + D = 8$, $x = R - L$, $y = U - D$ である。また、そのような回数の並べ方は $\frac{8!}{R!L!U!D!}$ 通りである。

(1) 最終位置が $(4, 0)$ であるためには $R - L = 4$, $U - D = 0$, $R + L + U + D = 8$ が必要である。 $R = L + 4$, $U = D$ とおくと $(L + 4) + L + 2D = 8$ より $L + D = 2$ である。したがって (L, D) は $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ である。

それぞれの経路数は

$$\frac{8!}{4!0!2!2!} = 420, \quad \frac{8!}{5!1!1!1!} = 336, \quad \frac{8!}{6!2!0!0!} = 28$$

である。よって合計は $420 + 336 + 28 = 784$ 通りである。全事象は 4^8 通りなので、求める確率は $\frac{784}{4^8} = \frac{784}{65536} = \frac{49}{4096}$ である。

(2) 8 歩後の点 (x, y) は、 $|x| + |y| \leq 8$ で、かつ $|x| + |y|$ と 8 の偶奇が一致する点である。条件 $x^2 - y^2 = 16$ は $(x-y)(x+y) = 16$ である。 $r = x - y$, $s = x + y$ とおくと、 r, s は同じ偶奇の整数で $rs = 16$ を満たす。奇偶の一致する因数の組は、順序を考えて $(r, s) = (2, 8), (4, 4), (8, 2)$ とこれらをとともに負にしたものだけである。 $x = (r+s)/2$, $y = (s-r)/2$ に戻すと、8 歩で到達可能な候補は $(\pm 4, 0)$, $(\pm 5, \pm 3)$ であり、いずれも $|x| + |y| \leq 8$ を満たす。

(1) より、 $(4, 0)$ への経路数は 784 通りである。対称性により $(-4, 0)$ への経路数も 784 通りである。

次に $(5, 3)$ への経路数を数える。条件は $R - L = 5$, $U - D = 3$, $R + L + U + D = 8$ である。これより $R = L + 5$, $U = D + 3$ で、合計に代入すると $(L + 5) + L + (D + 3) + D = 8$ すなわち $L + D = 0$ である。したがって $L = 0$, $D = 0$, $R = 5$, $U = 3$ であり、経路数は $\frac{8!}{5!3!} = 56$ 通りである。符号を変えた $(5, -3), (-5, 3), (-5, -3)$ についても同じく 56 通りである。

したがって、双曲線上にある確率の分子は $784 + 784 + 4 \cdot 56 = 1792$ である。よって求める確率は $\frac{1792}{4^8} = \frac{1792}{65536} = \frac{7}{256}$ である。

(3) (2) で数えた 1792 通りの経路のうち、途中で点 $(4, 2)$ を通るものを数える。点 $(4, 2)$ までの最短歩数は $4 + 2 = 6$ である。また 1 歩ごとに座標和の偶奇が変わるので、この点にいる時刻は 6 と同じ偶奇でなければならない。したがって 8 歩以内では時刻 6 または 8 だけが考えられるが、時刻 8 で $(4, 2)$ にいる場合は最終点が双曲線上でない。したがって、双曲線

上で終わる経路が途中で $(4, 2)$ を通るなら、時刻 6 で $(4, 2)$ にいなければならない。

6 歩目に $(4, 2)$ に到達するには、右へ 4 回、上へ 2 回進むしかない。したがってその経路数は $\frac{6!}{4!2!} = 15$ 通りである。

残り 2 歩で、 $(4, 2)$ から双曲線上の点に到達する可能性を調べる。(2) で得た候補のうち、 $(4, 2)$ から 2 歩で到達できるのは $(4, 0)$ 、 $(5, 3)$ である。 $(4, 0)$ へは下、下の 1 通りであり、 $(5, 3)$ へは右、上の順序を入れ替えて 2 通りである。したがって残り 2 歩の進み方は合計 $1 + 2 = 3$ 通りである。

よって、双曲線上で終わり、かつ途中で $(4, 2)$ を通る経路は $15 \cdot 3 = 45$ 通りである。条件付き確率は $\frac{45}{1792}$ であるから、求める値は $\frac{45}{1792}$ である。

【総評】 難易度は 6/10 で、20～25 分を見込む数え上げの差がつく問題である。(1) は右・左・上・下の回数を固定した多項係数、(2) は不定方程式から双曲線上の到達点を漏れなく列挙すること、(3) は条件付き確率の分母を 1792 経路とし、途中で $(4, 2)$ を通る 45 経路を数えることが採点点になる。因数 $(x - y)(x + y) = 16$ の符号や順序を落とすこと、第 1 象限だけで数えること、時刻 7 を候補に入れて偶奇を見落とすこと、分母を 4^8 のままにすることが典型的な失点である。時間が足りなければ (1)(2) を確実に答案化し、(3) は「時刻 6 に限る」まで書けば部分点を狙える。

【第 5 問】

座標平面上の曲線 C は、媒介変数 t を用いて

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表されている。曲線 C の y 軸に平行な接線を l とし、曲線 C 、直線 l および x 軸で囲まれる図形を D とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 正の実数 α, β に対し、次の 2 つの不定積分を求めよ。

$$I = \int e^{\alpha t} \cos \beta t dt, \quad J = \int e^{\alpha t} \sin \beta t dt$$

- (3) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V の値を求めよ。

【方針】

媒介変数表示された曲線では、接線の向きは $(dx/dt, dy/dt)$ で決まる。縦接線は $dx/dt = 0$ 、かつ $dy/dt \neq 0$ となる点で求める。(2) は部分積分を 2 回使い、 I, J の連立方程式として解く。(3) では、図形 D の境界となる曲線部分が $0 \leq t \leq \pi/4$ に対応し、この範囲で $x(t)$ が増加するので、回転体の体積を

$$\pi \int y^2 dx$$

で表す。最後は三角関数の積を和に直し、(2) の公式を用いて積分する。

【解答】

(1) 与えられた曲線は $x = e^t \cos t$ 、 $y = e^t \sin t$ である。導関数は $\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$ および $\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$ である。縦接線は $dx/dt = 0$ となる点で生じるので、 $\cos t - \sin t = 0$ より $t = \frac{\pi}{4}$ である。このとき

$$\frac{dy}{dt} = e^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}e^{\pi/4} \neq 0$$

であるから、確かに接線は縦である。

したがって、その接線 l は $t = \pi/4$ における x 座標を用いて $x = e^{\pi/4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$ すなわち $l: x = \frac{e^{\pi/4}}{\sqrt{2}}$ である。

(2)

$$I = \int e^{\alpha t} \cos \beta t dt, \quad J = \int e^{\alpha t} \sin \beta t dt$$

とおく。問題の条件より $\beta > 0$ である。

まず I について、 $\cos \beta t$ を積分する形で部分積分すると $I = \frac{e^{\alpha t} \sin \beta t}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} J$ である。すなわち $\beta I + \alpha J = e^{\alpha t} \sin \beta t$ である。

次に J について、 $\sin \beta t$ を積分する形で部分積分すると $J = -\frac{e^{\alpha t} \cos \beta t}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} I$ である。すなわち $-\alpha I + \beta J = -e^{\alpha t} \cos \beta t$ である。

この 2 本の連立方程式を解くと、

$$(\alpha^2 + \beta^2)I = e^{\alpha t}(\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t)$$

および

$$(\alpha^2 + \beta^2)J = e^{\alpha t}(\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t)$$

を得る。したがって

$$I = \frac{e^{\alpha t}(\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t)}{\alpha^2 + \beta^2} + C_1$$

$$J = \frac{e^{\alpha t}(\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t)}{\alpha^2 + \beta^2} + C_2$$

である。

(3) 図形 D の境界となる曲線部分は、 x 軸上の点 $(1, 0)$ に対応する $t = 0$ から、直線 l との接点に対応する $t = \pi/4$ までである。したがって $0 \leq t \leq \pi/4$ を用いる。この範囲では $\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t) \geq 0$ であるから、 x は増加する。 x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は

$$V = \pi \int y^2 dx$$

で与えられる。媒介変数 t を用いると

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} (e^t \sin t)^2 e^t (\cos t - \sin t) dt$$

である。したがって

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} e^{3t} \sin^2 t (\cos t - \sin t) dt$$

である。

三角関数を積和の形に直す。まず $\sin^2 t \cos t = \frac{1}{4}(\cos t - \cos 3t)$ であり、 $\sin^3 t = \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t)$ である。よって $\sin^2 t (\cos t - \sin t) = \frac{1}{4}(\cos t - 3 \sin t - \cos 3t + \sin 3t)$ となる。

したがって、(2) の公式を $\alpha = 3$ 、 $\beta = 1, 3$ に対して用いればよい。計算をまとめると、

$$\int e^{3t} \sin^2 t (\cos t - \sin t) dt = \frac{e^{3t}}{4} \left(\frac{3 \cos t - 4 \sin t}{5} - \frac{\cos 3t}{3} \right)$$

である。

これを 0 から $\pi/4$ まで代入する。 $t = \pi/4$ では

$$\cos t = \sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 3t = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから、

$$\frac{e^{3\pi/4}}{4} \left(\frac{3/\sqrt{2} - 4/\sqrt{2}}{5} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) = \frac{e^{3\pi/4}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}e^{3\pi/4}}{60}$$

である。 $t = 0$ では $\frac{1}{4} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{15}$ である。したがって

$$\int_0^{\pi/4} e^{3t} \sin^2 t (\cos t - \sin t) dt = \frac{\sqrt{2}e^{3\pi/4}}{60} - \frac{1}{15} = \frac{\sqrt{2}e^{3\pi/4} - 4}{60}$$

である。

よって求める体積は $V = \frac{\pi}{60} (\sqrt{2}e^{3\pi/4} - 4)$ である。

【総評】 難易度は 7/10 で、25～30 分を要する理系の差がつく積分問題である。(1) は $dx/dt = 0$ に加えて $dy/dt \neq 0$ を確認すること、(2) は部分積分 2 回から I, J の連立方程式を正確に解くこと、(3) は図形 D の境界が $0 \leq t \leq \pi/4$ に対応することを確認し、

$$V = \pi \int y^2 dx$$

を立てることが主な採点点になる。曲線全体 $0 \leq t \leq \pi/2$ を積分すること、 dx/dt を掛け忘れること、三角関数の 3 倍角変形や端点代入で符号を誤ることが典型的な失点である。(2) の公式を先に完成させ、(3) では被積分関数を $\cos t, \sin t, \cos 3t, \sin 3t$ の和にしてから代入すると計算が安定する。

【第 6 問】

A, B, C, D, O, P, Q は空間内の 7 点である。そのうち 6 点 A, B, C, D, O, P は相異なり、5 点 A, B, C, D, P はある球面 S 上にある。また、点 Q は直線 CD 上にある。さらに、ある実数 a, b に対し、次が成り立つとする。

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{OB}, \quad a|\overrightarrow{OA}|^2 = b|\overrightarrow{OB}|^2$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q は 3 点 A, B, P が定める平面 α 上にあることを示せ。
- (2) 点 Q は点 C または点 D に等しいことを示せ。

【方針】

ベクトルの等式 $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{OB}$ から、 O, A, P が一直線上、 O, B, Q が一直線上にあることを読む。平面 α は A, B, P を通るので、まず O がこの平面に含まれることを示せば、直線 OB 上の点 Q も平面 α に含まれる。後半は、点 O を原点とする球面の方程式を $|\mathbf{x}|^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + v = 0$ とおき、直線 OA, OB との交点のパラメータを根と係数の関係で調べる。与えられた等式から Q も球面上にあることを示し、直線 CD と球面の交点が高々 2 点であることを使う。

【解答】

- (1) 点 O を基準にして、

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{A}, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{B}, \quad \overrightarrow{OP} = \mathbf{P}, \quad \overrightarrow{OQ} = \mathbf{Q}$$

とおく。条件より $\mathbf{P} = a\mathbf{A}$, $\mathbf{Q} = b\mathbf{B}$ である。

まず $\mathbf{P} = a\mathbf{A}$ より、点 O, A, P は一直線上にある。問題の条件で A, B, C, D, O, P は相異なる点であるから、 A と P は異なり、直線 AP は確かに定まる。また、 O はこの直線 AP 上にある。平面 α は点 A, B, P を通る平面なので、直線 AP を含む。したがって $O \in \alpha$ である。

さらに $B \in \alpha$ であり、 $O \in \alpha$ であるから、直線 OB は平面 α に含まれる。ところが $\mathbf{Q} = b\mathbf{B}$ より、点 Q は直線 OB 上にある。したがって $Q \in \alpha$ である。

- (2) 点 O を原点とみなして考える。球面 S は、適当なベクトル $\mathbf{u}$ と実数 v を用いて $|\mathbf{x}|^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + v = 0$ と書ける。ただし、 $\mathbf{x}$ は点の位置ベクトルであり、 O が球面上にあるとは限らないので定数項 v は残しておく。

直線 OA 上の点は $\mathbf{x} = t\mathbf{A}$ と表せる。これを球面の方程式に代入すると $|\mathbf{A}|^2 t^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{A})t + v = 0$ である。この 2 次方程式の根は、直線 OA と球面 S との交点を表す。点 A は $t = 1$ 、点 P は $\mathbf{P} = a\mathbf{A}$ だから $t = a$ に対応する。したがって根は 1 と a である。なお $A \neq O$ なので $|\mathbf{A}|^2 > 0$ である。

根と係数の関係より $1 \cdot a = \frac{v}{|\mathbf{A}|^2}$ であるから、 $v = a|\mathbf{A}|^2$ を得る。

同様に、直線 OB 上の点を $\mathbf{x} = t\mathbf{B}$ とおくと、球面との交点を表す方程式は $|\mathbf{B}|^2 t^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})t + v = 0$ である。点 B は球面上にあり、また $B \neq O$ なので $|\mathbf{B}|^2 > 0$ である。よって $t = 1$ はこの 2 次方程式の根である。もう一つの根を $t = t_0$ とすると、根と係数の関係より $t_0 = \frac{v}{|\mathbf{B}|^2}$ である。

一方、問題の条件より $a|\overrightarrow{OA}|^2 = b|\overrightarrow{OB}|^2$ であり、先ほど得た $v = a|\mathbf{A}|^2$ を用いると $v = b|\mathbf{B}|^2$ である。したがって $t_0 = \frac{v}{|\mathbf{B}|^2} = b$ である。つまり、直線 OB と球面 S との交点の一つは $t = b$ に対応する点であり、これは $\mathbf{Q} = b\mathbf{B}$ で表される点 Q である。よって $Q \in S$ である。

ここで、問題の条件より Q は直線 CD 上にある。また、 C, D は球面 S 上の相異なる点である。直線 CD と球面 S の交点は、高々 2 点である。すでに C, D という 2 つの相異なる交点があるため、同じ直線 CD 上で球面 S に属する点 Q は、そのどちらかと一致しなければならない。

したがって $Q = C$ または $Q = D$ である。

【総評】 難易度は 8/10 で、理系では 20～25 分を見込む完答者の少ない差がつく証明問題である。(1) は $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA}$ から $O \in AP \subset \alpha$, 続いて $\overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{OB}$ から $Q \in OB \subset \alpha$ と論理を一段ずつ積む。(2) は一般の球面方程式に直線 OA, OB を代入し、交点を表す 2 次方程式の根の積を比較するのが核心である。球面が O を通ると誤認して定数項を 0 にすること、結論 $Q \in \alpha$ を仮定して書き始めること、直線と球面の交点が高々 2 点である理由を使わず結論へ飛ぶことが典型的な失点になる。時間がなければ (1) を確実に取り、(2) は $Q \in S$ を示すところまででも答案に残したい。