

東京大学 1986 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面において、座標 (x, y) が不等式 $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1$ をみたすような点 $P(x, y)$ の作る集合を D とする。三点 $A(a, 0), B(0, b), C\left(c, \frac{1}{c}\right)$ を頂点とし、 D に含まれる三角形 ABC はどのような場合に面積が最大となるか。また面積の最大値を求めよ。ただし $a \geq 0, b \geq 0, c > 0$ とする。

▶ 解法 1 (面積を保つ変換で標準化)

【方針】

$X = x/c, Y = cy$ により双曲線と面積を保ったまま C を $(1, 1)$ へ移す。 $A = (r, 0), B = (0, s)$ とし、辺上で $XY \leq 1$ が成り立つ必要十分条件を求めてから面積を最大化する。

【解答】

$$X = \frac{x}{c}, \quad Y = cy$$

と変換する。このとき $XY = xy$ で領域 D は変わらず、二方向の倍率の積が 1 なので面積も変わらない。新しい座標で

$$C = (1, 1), \quad A = (r, 0), \quad B = (0, s), \quad r = \frac{a}{c}, \quad s = bc$$

と書く。

辺 AC 上の点を

$$(X, Y) = (1 + \lambda(r - 1), 1 - \lambda) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

とおくと

$$XY - 1 = \lambda\{r - 2 - \lambda(r - 1)\}.$$

これが常に 0 以下となる条件は $0 \leq r \leq 2$ である。同様に辺 BC から $0 \leq s \leq 2$ を得る。辺 AB では

$$XY = rs\lambda(1 - \lambda) \leq \frac{rs}{4} \leq 1.$$

また三角形を水平線で切ると、各切り口で XY が最大になる点は右端の境界上にある。よって以上の辺の条件は内部に対しても十分である。

三角形の面積は

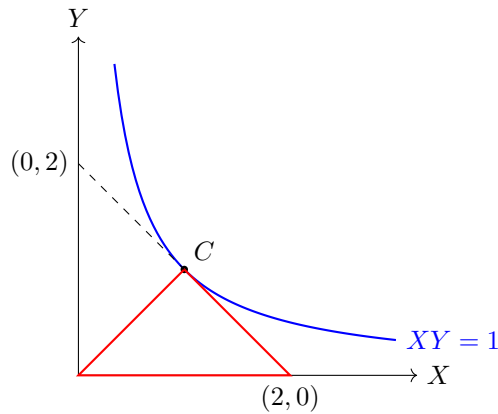
$$S = \frac{r + s - rs}{2} = \frac{1 - (r - 1)(s - 1)}{2}.$$

$-1 \leq r - 1, s - 1 \leq 1$ より $S \leq 1$ であり、等号は

$$(r, s) = (2, 0), (0, 2)$$

で成り立つ。元に戻して

$$(a, b) = (2c, 0) \text{ または } \left(0, \frac{2}{c}\right), \quad S_{\max} = 1.$$



▶ 解法 2 (接線と一次式としての面積)

【方針】

標準化後、 $(1, 1)$ における双曲線の接線 $X + Y = 2$ を利用して、二本の辺が領域内に入る条件を $r, s \leq 2$ と読む。その長方形上で面積を一方の変数についての一次式として最大化する。

【解答】

解法 1 と同じ面積を保つ変換により

$$A = (r, 0), \quad B = (0, s), \quad C = (1, 1)$$

としてよい。双曲線 $XY = 1$ の C における接線は

$$X + Y = 2$$

である。 C から X 軸上の点へ引く線分が接点直後で領域 $XY \leq 1$ の外へ出ないためには、その点が $(2, 0)$ より右へ出ないことが必要である。直接線分を代入すれば十分性も分かるので

$$0 \leq r \leq 2.$$

同様に $0 \leq s \leq 2$ である。

面積は

$$S = \frac{r + s - rs}{2} = \frac{r + (1 - r)s}{2}.$$

$0 \leq r \leq 1$ のとき、固定した r に対して S は s とともに増えるので

$$S \leq \frac{r + 2(1 - r)}{2} = 1 - \frac{r}{2} \leq 1.$$

等号は $(r, s) = (0, 2)$ で成り立つ。

$1 \leq r \leq 2$ のときは S は s とともに減るので

$$S \leq \frac{r}{2} \leq 1.$$

等号は $(r, s) = (2, 0)$ で成り立つ。したがって最大値は 1 で、元の係数では

$$(a, b) = (2c, 0) \quad \text{または} \quad (a, b) = \left(0, \frac{2}{c}\right)$$

である。

【総評】 難易度 7、計算量 6。目安時間は 22 分である。頂点三つが D に入るだけでは不十分で、辺と内部まで含まれる条件を示す必要がある。面積を保つ変換で $C = (1, 1)$ に標準化すると、接線の切片 2 がそのまま r, s の上限になる。最大は退化しない三角形で達成されるが、 $a = 0$ または $b = 0$ は問題の条件で許されている。

【第 2 問】

長軸, 短軸の長さがそれぞれ 4, 2 である楕円に囲まれた領域を A とし, この楕円の短軸の方向に, A を $\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ だけ平行移動してできる領域を B とする. このとき A と B の共通部分 $C = A \cap B$ の面積 M を求めよ. ただし $\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = \cos \frac{\pi}{12}$ である.

注: 方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) で表される楕円において, $2a, 2b$ の内大きい方を長軸の長さといい, 他方を短軸の長さという.

▶ 解法 1 (扇形から三角形を引く)

【方針】

長軸方向だけを半分に縮め, 二つの楕円を中心間距離 d の二つの単位円へ変える. 共通部分を二つの合同な弓形に分け, 扇形から二等辺三角形を引いて求め, 最後に面積倍率を戻す.

【解答】

楕円を

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$

とし, 短軸方向の移動距離を

$$d = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

とする. $X = x/2, Y = y$ とおけば二つの楕円は二つの単位円になり, 元の面積は新しい座標での面積の 2 倍である.

二円の中心と交点を結ぶ半径のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \sin \frac{\pi}{12},$$

したがって $\theta = 5\pi/12$ である. 単位円の共通部分の面積 L は二つの弓形の和だから

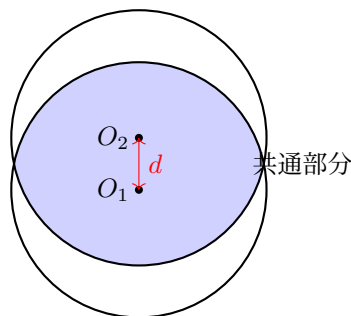
$$L = 2 \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right).$$

ここで $\sin 2\theta = \sin(5\pi/6) = 1/2$ より

$$L = \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}.$$

面積倍率を戻すと

$$M = 2L = \frac{5\pi}{3} - 1.$$



▶ 解法 2 (円弧を積分する)

【方針】

同じ単位円への変換後、共通部分を中心線の中点で上下に分ける。上半分では原点中心の円の横幅が狭いので、その半幅 $\sqrt{1-Y^2}$ を積分し、三角置換で値を求める。

【解答】

$X = x/2, Y = y$ により、中心 $(0, 0)$ と $(0, d)$ をもつ二つの単位円へ直す。共通部分は直線 $Y = d/2$ に関して対称であり、 $Y \geq d/2$ では原点中心の円の方が横幅を制限する。したがってその面積 L は

$$L = 4 \int_{d/2}^1 \sqrt{1-Y^2} dY.$$

$Y = \sin t$ とおくと

$$\int \sqrt{1-Y^2} dY = \frac{1}{2} \left(Y \sqrt{1-Y^2} + \sin^{-1} Y \right).$$

ここで

$$\frac{d}{2} = \sin \frac{\pi}{12}, \quad \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}} = \cos \frac{\pi}{12}$$

であるから

$$L = \pi - d \sqrt{1 - \frac{d^2}{4}} - 2 \sin^{-1} \frac{d}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{2}.$$

元の楕円では面積が 2 倍になるので

$$M = \frac{5\pi}{3} - 1$$

である。

【総評】 難易度 5、計算量 5。目安時間は 15 分である。楕円を円へ移す変換は長軸方向だけを縮めるため、面積倍率 2 を最後に戻す。 $d/2$ は $\cos(\pi/12)$ ではなく $\sin(\pi/12)$ であり、中心角が $5\pi/6$ になる点に注意する。積分解法でも積分記号と上下端は独立した表示数式に置く。

■ 第 3 問

- (1) xyz 空間において、三点 $A\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, $B\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$, $C(1, 0, 1)$ を通る平面 S_0 に垂直で、長さ 1 のベクトル $\vec{n}_0$ をすべて求めよ。
- (2) 二点 $D(1, 0, 0)$, $E(0, 1, 0)$ を通る直線 l を軸として、平面 S_0 を回転して得られるすべての平面 S を考える。このような平面 S に垂直で長さ 1 のベクトル $\vec{n} = (x, y, z)$ の y 成分の絶対値 $|y|$ は S と共に変化するが、その最大値および最小値を求めよ。

▶ 解法 1 (回転軸方向と垂直方向に分解)

【方針】

(1) は二本の平面内ベクトルとの内積を 0 とおく。(2) は法線ベクトルを回転軸方向の成分と垂直成分に分ける。軸方向成分は一定で、垂直成分の内積は振幅の範囲をすべて動く。

【解答】

(1) $\vec{n} = (p, q, r)$ とおく。

$$\overrightarrow{AB} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \overrightarrow{AC} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right).$$

直交条件より $q + r = 0$, $2p + r = 0$ なので

$$\vec{n} = (p, 2p, -2p).$$

長さが 1 であることから $9p^2 = 1$ となり

$$\vec{n}_0 = \pm \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

(2) 直線 l の方向の単位ベクトルを

$$\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

とする。 $\vec{n}_0 = (1/3, 2/3, -2/3)$ 、 y 方向の単位ベクトルを $\vec{e} = (0, 1, 0)$ とおくと

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad \vec{e} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

したがって軸方向成分どうしの内積は常に $1/6$ である。

軸に垂直な成分の長さはそれぞれ

$$\sqrt{1 - \frac{1}{18}} = \sqrt{\frac{17}{18}}, \quad \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

回転によって両成分の内積は

$$-\frac{\sqrt{17}}{6} \leq \text{垂直成分の寄与} \leq \frac{\sqrt{17}}{6}$$

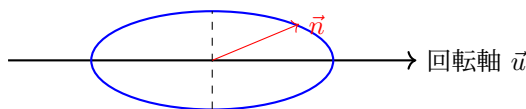
をすべて動く。よって

$$\frac{1 - \sqrt{17}}{6} \leq y \leq \frac{1 + \sqrt{17}}{6}.$$

この区間は 0 を含むから

$$\min |y| = 0, \quad \max |y| = \frac{1 + \sqrt{17}}{6}.$$

法線の先端が描く円



▶ 解法 2 (軸に合わせた直交座標)

【方針】

回転軸方向 $\vec{u}$ 、水平な直交方向 $\vec{v}$ 、鉛直方向 $\vec{w}$ を単位ベクトルとして取る。法線の $\vec{v}, \vec{w}$ 成分を三角関数で回転させ、 y 成分を中心値と正弦波の振幅に分ける。

【解答】

(1) 二本の内積条件を解けば

$$\vec{n}_0 = \pm \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

である。

(2) 次の互いに直交する単位ベクトルを取る。

$$\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \vec{w} = (0, 0, 1).$$

$\vec{u}$ は回転軸方向である。正の方の $\vec{n}_0$ の成分は

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{w} = -\frac{2}{3}.$$

回転後も $\vec{u}$ 成分は一定で、 $\vec{v}$ 成分は

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{2}{3} \sin \theta$$

の形で変化する。 y 方向の単位ベクトルは

$$(0, 1, 0) = \frac{\vec{u} + \vec{v}}{\sqrt{2}}$$

だから

$$y = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{2}{3\sqrt{2}} \sin \theta.$$

後二項の振幅は

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{17}}{6}.$$

したがって y の範囲は解法 1 と同じであり

$$\min |y| = 0, \quad \max |y| = \frac{1 + \sqrt{17}}{6}$$

を得る。符号を反対にした法線も絶対値の範囲を変えない。

【総評】 難易度 7、計算量 6。目安時間は 24 分である。(1) は外積や行列式を使わず二本の内積条件で十分である。(2) では平面の回転に伴って法線も同じ軸のまわりを回ること、軸方向成分は不変であることを明記する。振幅には法線側だけでなく y 方向を軸へ射影した長さも掛かる。

【第 4 問】

二次方程式 $ax^2 - 2bx + c = 0$ の係数 a, b, c が、それぞれ次の範囲を動くものとする。

$$0.9 \leq a \leq 1.1, \quad 2.7 \leq b \leq 3.3, \quad 4.5 \leq c \leq 5.4$$

- (1) このとき $u = \frac{b}{a}, v = \frac{c}{a}$ を座標とする点 $P(u, v)$ の動く範囲を定め、図示せよ。
- (2) 上の二次方程式の二つの解のうち、大きい方を z とする。 a, b, c が上の範囲を動くときの、 z の最大値、最小値を求めよ。

▶ 解法 1 (共通する係数 a の区間)

【方針】

(1) は同じ a が三つの区間条件を同時に満たすことを、三つの閉区間の共通部分として表す。一次元の区間は二つずつ交われば共通部分をもつため、 $u, v, u/v$ の不等式へ整理する。(2) は大きい根の各係数に関する単調性を示して端点を選ぶ。

【解答】

(1) ある a に対して

$$\frac{9}{10} \leq a \leq \frac{11}{10}, \quad \frac{27}{10} \leq au \leq \frac{33}{10}, \quad \frac{9}{2} \leq av \leq \frac{27}{5}$$

が同時に成り立つことが必要十分である。対応する三つの a の区間が共通部分をもつ条件を整理すると

$$\frac{27}{11} \leq u \leq \frac{11}{3}, \quad \frac{45}{11} \leq v \leq 6, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{u}{v} \leq \frac{11}{15}.$$

これは uv 平面で直線 $v = 2u$ 、 $v = 15u/11$ と四本の縦横線に囲まれる六角形である。頂点は

$$\left(\frac{27}{11}, \frac{45}{11}\right), \left(3, \frac{45}{11}\right), \left(\frac{11}{3}, 5\right), \left(\frac{11}{3}, 6\right), (3, 6), \left(\frac{27}{11}, \frac{54}{11}\right).$$

(2) 判別式に相当する量は

$$b^2 - ac \geq \left(\frac{27}{10}\right)^2 - \frac{11}{10} \cdot \frac{27}{5} = \frac{27}{20} > 0.$$

大きい根は

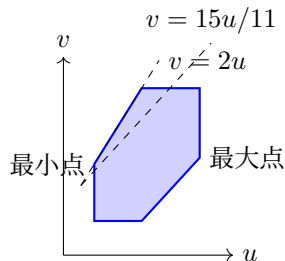
$$z = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

これは b とともに増え、 c とともに減る。また方程式を a で微分すると

$$\frac{dz}{da} = -\frac{z^2}{2az - 2b} < 0$$

である。よって最大は $(a, b, c) = (9/10, 33/10, 9/2)$ 、最小は $(11/10, 27/10, 27/5)$ で生じる。計算して

$$z_{\max} = \frac{11 + 2\sqrt{19}}{3}, \quad z_{\min} = \frac{27 + 3\sqrt{15}}{11}.$$



▶ 解法 2 (六角形の辺上で調べる)

【方針】

(1) で得た六角形上で $z = u + \sqrt{u^2 - v}$ を考える。内部に極値はなく、縦辺・横辺・二本の斜辺のそれぞれで単調性を調べれば頂点だけを比較すればよい。

【解答】

(1) 三つの a の区間の共通部分を調べると

$$\frac{27}{11} \leq u \leq \frac{11}{3}, \quad \frac{45}{11} \leq v \leq 6, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{u}{v} \leq \frac{11}{15}$$

であり、頂点は解法 1 に記した六点である。

(2) 方程式を a で割ると

$$x^2 - 2ux + v = 0$$

だから

$$z = u + \sqrt{u^2 - v}.$$

領域内では z は u が増すと増え、 v が増すと減る。縦辺と横辺では直ちに端点だけを見ればよい。斜辺は $v = ku$ の形であり

$$z = u + \sqrt{u(u - k)}$$

は各斜辺の範囲で u とともに増える。したがって六頂点だけを比較すれば十分である。

最大候補は $(u, v) = (11/3, 5)$ 、最小候補は $(27/11, 54/11)$ となる。代入して

$$z_{\max} = \frac{11}{3} + \sqrt{\frac{121}{9} - 5} = \frac{11 + 2\sqrt{19}}{3},$$

$$z_{\min} = \frac{27}{11} + \sqrt{\frac{729 - 594}{121}} = \frac{27 + 3\sqrt{15}}{11}.$$

対応する係数はそれぞれ

$$(a, b, c) = \left(\frac{9}{10}, \frac{33}{10}, \frac{9}{2} \right), \quad \left(\frac{11}{10}, \frac{27}{10}, \frac{27}{5} \right)$$

であり、実際に許された範囲に入る。

【総評】 難易度 7、計算量 7。目安時間は 28 分である。 u, v を別々の長方形に入れるだけでは不十分で、同じ a で割ったため $u/v = b/c$ の制約が残る。図では六頂点まで正確に示す。(2) は根号内が全範囲で正であることを確認し、単調性を根拠なく断言しない。

【第 5 問】

ベンチが $k+1$ 個一列に並べあり、 A, B の二人が次のようなゲームをする。最初 A は左端、 B は右端のベンチにあり、じゃんけんをして勝った方が他の端に向かって一つ隣のベンチに進み、負けた方は動かないとする。また二人が同じ手を出して引き分けとなったときには、二人とも動かないとする。こうしてじゃんけんを繰返して早く他の隣のベンチに着いた者を勝ちとする。一回のじゃんけんで、 A が勝つ確率、負ける確率、引き分けとなる確率はすべて等しいとき、次の確率を求めよ。

- (1) n 回じゃんけんをした後に、二人が同じベンチに座っている確率 q
- (2) n 回じゃんけんをしたとき、 A, B の移動回数がそれぞれ x 回、 y 回である確率 $p(x, y)$
- (3) $k=3$ のとき n 回のじゃんけんの後に、まだゲームの勝敗がきまらない確率 p 、ただし $n \geq 3$ とする。

▶ 解法 1 (三項分布で数える)

【方針】

各回を A の勝ち、 B の勝ち、引き分けの三種類として数える。未決着なら通常の一項分布を使い、どちらかの移動回数が k になる場合は第 n 回が最後の勝ちである条件を付ける。

【解答】

第 n 回までの A, B の移動回数を X, Y とする。各回の三結果は確率 $1/3$ であり、 $X = k$ または $Y = k$ になった時点でゲームは終わる。

- (1) 二人が同じベンチにいる条件は $X + Y = k$ である。 $1 \leq X \leq k-1$ なら、移動が起きた k 回を選び、すべてが一方だけの勝ちとなる二通りを除くので

$${}_nC_k(2^k - 2)$$

通りである。 $(X, Y) = (k, 0), (0, k)$ では第 n 回に初めて端へ着く必要があり、それぞれ ${}_{n-1}C_{k-1}$ 通りである。したがって

$$q = \begin{cases} \frac{{}_nC_k 2^k - 2 {}_{n-1}C_{k-1}}{3^n} & (n \geq k), \\ 0 & (n < k). \end{cases}$$

- (2) 未決着の $0 \leq x, y < k, x + y \leq n$ では

$$p(x, y) = \frac{n!}{3^n x! y! (n - x - y)!}.$$

$x = k, 0 \leq y < k, k + y \leq n$ なら第 n 回が A の最後の勝ちなので

$$p(k, y) = \frac{(n-1)!}{3^n (k-1)! y! (n - k - y)!}.$$

同様に $0 \leq x < k, y = k, x + k \leq n$ なら

$$p(x, k) = \frac{(n-1)!}{3^n x! (k-1)! (n - x - k)!}.$$

これら以外は $p(x, y) = 0$ である。

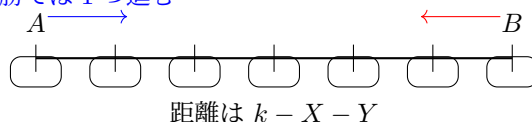
- (3) $k=3$ で未決着となる条件は $X, Y \leq 2$ である。よって

$$p = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 \frac{n!}{3^n x! y! (n - x - y)!}.$$

負の階乗を含む項を 0 として整理すると

$$p = \frac{n^4 - 2n^3 + 7n^2 + 2n + 4}{4 \cdot 3^n} \quad (n \geq 3).$$

勝てば 1 つ進む



▶ 解法 2 (状態の漸化式と母多項式)

【方針】

状態 (x, y) への到達確率を一步前の三状態から更新する。未決着の範囲では更新式を反復した係数が $(1 + U + V)^n$ の係数になる。吸収境界だけ最後の一步を分離して各小問を求める。

【解答】

(2) 未決着状態 (x, y) の確率を $P_n(x, y)$ とすると

$$P_{n+1}(x, y) = \frac{1}{3} \{P_n(x, y) + P_n(x-1, y) + P_n(x, y-1)\}.$$

したがって未決着範囲 $x, y < k$ では、 $3^n P_n(x, y)$ は

$$(1 + U + V)^n$$

の $U^x V^y$ の係数である。よって

$$P_n(x, y) = \frac{n!}{3^n x! y! (n-x-y)!}.$$

境界 $x = k$ へ入るには、第 n 回直前に $(k-1, y)$ にいて最後に A が勝つ必要があるから

$$p(k, y) = \frac{1}{3} P_{n-1}(k-1, y),$$

同様に $p(x, k) = P_{n-1}(x, k-1)/3$ であり、解法 1 の (2) の式を得る。

(1) 同じベンチの内部状態は $x + y = k$ 、 $x, y \geq 1$ なので、母多項式の次数 k の係数和から両端を除く。両端は吸収境界へ最後の一步で入る場合を加え直す。したがって

$$q = \frac{{}_n C_k (2^k - 2) + 2 {}_{n-1} C_{k-1}}{3^n} = \frac{{}_n C_k 2^k - 2 {}_{n-1} C_k}{3^n}$$

である。ただし $n < k$ では 0 である。

(3) $k = 3$ で未決着である確率は母多項式の U, V の次数がそれぞれ 2 以下の項の係数和だから

$$3^n p = 1 + 2n + 2n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}.$$

これを整理して

$$p = \frac{n^4 - 2n^3 + 7n^2 + 2n + 4}{4 \cdot 3^n}$$

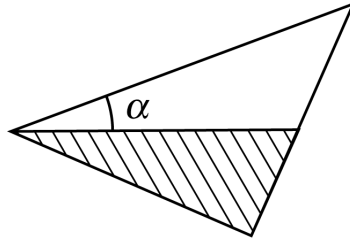
を得る。

【総評】 難易度 7、計算量 7。目安時間は 28 分である。二人が同じベンチにいる条件は $X = Y$ ではなく $X + Y = k$ である。移動回数が k の場合は、それ以前にゲームが終わらないよう第 n 回を最後の勝ちに固定する。未決着状態と吸収境界を同じ三項分布で無条件に数えないことが重要である。

【第 6 問】

直円錐形のグラスに水が満ちている。水面の円の半径は 1、深さも 1 である。

- (1) このグラスを右の図のように角度 α だけ傾けたとき、できる水面は楕円である。この楕円の中心からグラスのふちを含む平面までの距離 l と、楕円の長半径 a および短半径 b を、 $m = \tan \alpha$ で表せ。ただし楕円の長半径、短半径とは、それぞれ長軸、短軸の長さの $\frac{1}{2}$ のことである。
- (2) 傾けたときこぼれた水の量が、最初の水の量の $\frac{1}{2}$ であるとき、 $m = \tan \alpha$ の値を求めよ。ただしグラスの円錐の頂点から、新しい水面までの距離を h とするとき、残った水の量は、 $\frac{1}{3}\pi abh$ に等しいことを用いよ。


▶ 解法 1 (水面の平面と円錐の交線)
【方針】

円錐を $x^2 + y^2 = z^2$ 、ふちの平面を $z = 1$ と置く。傾いた水面の平面を最も低いふちの点と傾き m から定め、円錐へ代入して平方完成する。投影した半径を水面上の実長へ戻し、体積条件を解く。

【解答】

(1) 円錐の頂点を原点、軸を z 軸に取り

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad (0 \leq z \leq 1)$$

とする。傾いた水面は最も低いふちの点 $(0, 1, 1)$ を通るので

$$z = m(y - 1) + 1$$

と表せる。水面が楕円となる範囲は $0 \leq m < 1$ である。

円錐へ代入して平方完成すると

$$\frac{1+m}{1-m}x^2 + (1+m)^2\left(y - \frac{m}{1+m}\right)^2 = 1.$$

楕円の中心は

$$\left(0, \frac{m}{1+m}, \frac{1}{1+m}\right)$$

なので

$$l = \frac{m}{1+m}.$$

x 方向の半径は実長のまま

$$b = \sqrt{\frac{1-m}{1+m}}.$$

一方、 y が Δy 変わると水面上では z が $m\Delta y$ 変わる。したがってもう一方の半径は

$$a = \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m}.$$

これは $m > 0$ で長半径となり、 $m = 0$ でも両式は 1 である。

(2) 頂点から水面までの距離は

$$h = \frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

よって

$$abh = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{3/2}.$$

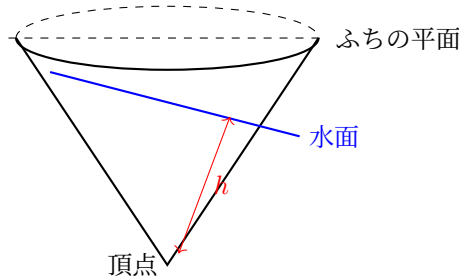
残った水が最初の半分なので

$$\left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{3/2} = \frac{1}{2}.$$

これを解いて

$$m = \frac{\sqrt[3]{4}-1}{\sqrt[3]{4}+1}$$

を得る。



▶ 解法 2 (軸を含む断面から長半径を求める)

【方針】

水面と円錐軸を含む yz 平面で二本の母線との交点を求める。その中点が楕円の中心で、二交点間の半分が長半径になる。中心を通る x 方向の切り口から短半径を求め、同じ体積条件へ進む。

【解答】

(1) 円錐を

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad z = m(y-1) + 1$$

とする。 yz 平面では円錐の母線は $y = z$ と $y = -z$ である。

$y = z$ と水面の交点は $(y, z) = (1, 1)$ 、 $y = -z$ との交点は

$$(y, z) = \left(-\frac{1-m}{1+m}, \frac{1-m}{1+m}\right)$$

である。二点の中点は

$$(y, z) = \left(\frac{m}{1+m}, \frac{1}{1+m}\right)$$

で、これが楕円の中心である。よってふちの平面までの距離は

$$l = 1 - \frac{1}{1+m} = \frac{m}{1+m}.$$

二交点間の実長の半分は

$$a = \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m}.$$

また中心を通り x 軸に平行な直線上では $y = m/(1+m)$ 、 $z = 1/(1+m)$ なので、円錐の式から

$$x^2 = z^2 - y^2 = \frac{1-m}{1+m}.$$

したがって

$$b = \sqrt{\frac{1-m}{1+m}}.$$

(2) 頂点から水面までの垂直距離は

$$h = \frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

ゆえに残水量が半分という条件は

$$abh = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{3/2} = \frac{1}{2}$$

である。したがって

$$m = \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{4} + 1}$$

となる。

【総評】 難易度 8、計算量 7。目安時間は 32 分である。水面は最も低いふちの点を通ること、楕円の長半径は xy 平面への投影長ではなく水面上の実長であることが核心である。 h も鉛直の高さではなく頂点から水面の平面までの垂直距離である。断面解法では二本の母線との交点の中点が楕円中心になる対称性を明記する。