

東京大学 1987 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

行列 $X = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$ が条件 $X^2 - 4X + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ をみたすとき、このような x, y を座標とする点 (x, y) が存在する範囲を図示せよ。ただし、行列の成分は実数とする。

▶ 解法 1：成分条件を場合分けする

【方針】

行列の式を成分で展開する。対称行列 X について $X^2 - 4X + 3E = O$ を書き下すと、対角成分から z^2 の条件、非対角成分から $z(x + y - 4) = 0$ が得られる。 $z = 0$ の場合と $x + y = 4$ の場合に分け、実数 z が存在するための条件を $z^2 \geq 0$ として読み取る。最後は、平面上で線分と孤立した 2 点として図示する。

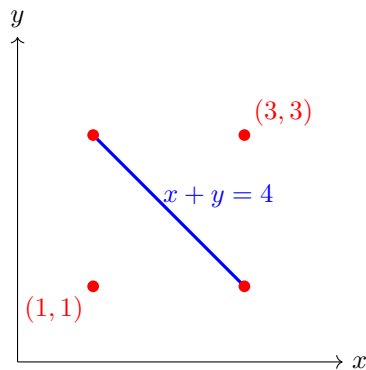
【解答】

条件 $X^2 - 4X + 3E = O$ を成分で書く。 X の第 1 行が (x, z) 、第 2 行が (z, y) であるから、 X^2 の第 1 行は $(x^2 + z^2, xz + zy)$ 第 2 行は $(zx + yz, z^2 + y^2)$ である。したがって条件は $x^2 + z^2 - 4x + 3 = 0$, $y^2 + z^2 - 4y + 3 = 0$, $z(x + y - 4) = 0$ である。

まず $z = 0$ の場合を考える。このとき $x^2 - 4x + 3 = 0$, $y^2 - 4y + 3 = 0$ だから $x = 1, 3$, $y = 1, 3$ である。よって $(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)$ が得られる。

次に $z \neq 0$ の場合を考える。このとき $x + y = 4$ である。また第 1 の式から $z^2 = -x^2 + 4x - 3 = (x - 1)(3 - x)$ である。実数 z が存在するための必要十分条件は $z^2 \geq 0$ すなわち $1 \leq x \leq 3$ である。 $y = 4 - x$ なので、この場合に得られる点は $x + y = 4$, $1 \leq x \leq 3$ を満たす線分上の点である。この線分の端点は $(1, 3), (3, 1)$ であり、これは $z = 0$ の場合にも含まれている。

以上より、求める範囲は $x + y = 4$, $1 \leq x \leq 3$ で表される線分と、孤立した 2 点 $(1, 1)$, $(3, 3)$ である。図示では、点 $(1, 3)$ と $(3, 1)$ を結ぶ線分を描き、さらに $(1, 1)$, $(3, 3)$ を打てばよい。



▶ 解法 2：二つの因数条件を同時に使う

【方針】

成分条件の二つの対角式を引くと $(x-y)(x+y-4)=0$ 、非対角成分から $z(x+y-4)=0$ を得る。そこで $x+y=4$ か否かで分けると、線分と二つの孤立点を短く分類できる。

【解答】

成分比較により

$$\begin{aligned}x^2 + z^2 - 4x + 3 &= 0, & y^2 + z^2 - 4y + 3 &= 0, \\ z(x+y-4) &= 0\end{aligned}$$

を得る。最初の二式を引くと

$$(x-y)(x+y-4)=0.$$

$x+y=4$ のとき、第 1 式から

$$z^2 = (x-1)(3-x)$$

である。実数 z が存在する条件は $1 \leq x \leq 3$ であるから、端点 $(1, 3), (3, 1)$ を含む線分

$$x+y=4, \quad 1 \leq x \leq 3$$

を得る。

$x+y \neq 4$ のときは、上の二つの因数条件から $x=y$ かつ $z=0$ である。対角式は

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

となるので $x=y=1$ または $x=y=3$ である。よって、この場合は $(1, 1), (3, 3)$ である。

以上より、求める範囲は線分

$$x+y=4, \quad 1 \leq x \leq 3$$

と、孤立点 $(1, 1), (3, 3)$ の和集合である。

【総評】 難度 5、計算量 4、目安時間 12 分。原問題が行列方程式を明示しているため、成分比較を正面から用いる。 $z=0$ と $x+y=4$ の場合分け、または二つの因数条件の同時利用で、線分と孤立点を漏れなく分類する。端点の重複を整理し、図には線分と二つの孤立点を明示する。

【第 2 問】

a を正の定数とし、 x の関数 $f(x) = x^3 - ax^2 - a^2x$ のグラフを C とする。 $f(x)$ が極大となる x の値を b とするとき、点 $(b, f(b))$ における C の接線と C とによって囲まれる部分の面積を a で表せ。

▶ 解法 1：極大点と交点を順に求める

【方針】

まず導関数から極大点 b を求める。極大点では接線が水平になるので、接線は $y = f(b)$ である。交点は $x = au$ とおいて無次元化すると、 $u = -\frac{1}{3}$ が接点で重なり、もう一つの交点が $u = \frac{5}{3}$ と分かる。面積は接線の高さから曲線を引いたものを積分し、 $x = au$ 、 $dx = a du$ によって全体倍率が a^4 になることを確認する。

【解答】

まず極大点を求める。導関数は $f'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2 = (3x+a)(x-a)$ である。 $a > 0$ なので、臨界点は $x = -\frac{a}{3}$ 、 $x = a$ である。さらに $f''(x) = 6x - 2a$ だから、 $x = -\frac{a}{3}$ では $f''(x) = -4a < 0$ となり、ここで極大となる。したがって $b = -\frac{a}{3}$ である。

このとき $f(b) = f\left(-\frac{a}{3}\right) = \frac{5a^3}{27}$ であり、極大点での接線は水平だから $y = \frac{5a^3}{27}$ である。曲線との交点を求めるため、 $x = au$ とおく。すると $f(x) = a^3(u^3 - u^2 - u)$ であり、交点条件は $u^3 - u^2 - u = \frac{5}{27}$ である。整理すると $u^3 - u^2 - u - \frac{5}{27} = 0$ で、これは $\left(u + \frac{1}{3}\right)^2 \left(u - \frac{5}{3}\right) = 0$ と因数分解できる。したがって接線と曲線で囲まれる部分は、 $u = -\frac{1}{3}$ から $u = \frac{5}{3}$ までである。

この区間では接線が曲線の上にあるので

$$S = \int_{-a/3}^{5a/3} \left\{ \frac{5a^3}{27} - f(x) \right\} dx$$

である。 $x = au$ 、 $dx = a du$ を用いると

$$S = a^4 \int_{-1/3}^{5/3} \left\{ \frac{5}{27} - (u^3 - u^2 - u) \right\} du$$

となる。被積分関数は

$$\frac{5}{27} - (u^3 - u^2 - u) = - \left(u + \frac{1}{3} \right)^2 \left(u - \frac{5}{3} \right)$$

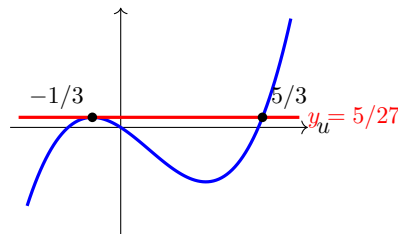
であり、積分を計算すると

$$\int_{-1/3}^{5/3} \left\{ \frac{5}{27} - (u^3 - u^2 - u) \right\} du = \frac{4}{3}$$

となる。よって求める面積は

$$S = \frac{4}{3} a^4$$

である。



▶ 解法 2：平行移動して面積を一度に積分する

【方針】

横軸を a 、縦軸を a^3 で規格化し、さらに極大点を原点へ移す。接線と曲線の差が $v^2(2-v)$ となるので、交点と面積を同じ因数分解から同時に読み取る。

【解答】

導関数

$$f'(x) = (3x + a)(x - a)$$

より、極大点は $b = -a/3$ であり

$$f(b) = \frac{5a^3}{27}.$$

ここで

$$x = a \left(v - \frac{1}{3} \right)$$

とおく。すると $dx = a dv$ であり、水平接線と曲線の高さの差は

$$\begin{aligned} \frac{5a^3}{27} - f(x) &= a^3 \left\{ \frac{5}{27} - \left(v - \frac{1}{3} \right)^3 + \left(v - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(v - \frac{1}{3} \right) \right\} \\ &= a^3 v^2 (2 - v). \end{aligned}$$

したがって、二つの交点は $v = 0, 2$ に対応し、その間では差は非負である。求める面積は

$$\begin{aligned} S &= a^4 \int_0^2 v^2 (2 - v) dv \\ &= a^4 \left[\frac{2v^3}{3} - \frac{v^4}{4} \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} a^4. \end{aligned}$$

【総評】 難度 6、計算量 6、目安時間 15 分。極大点の水平接線、重解となる接点、もう一つの交点、符号を順に確認して面積を設定する。規格化 $x = au$ と極大点を原点へ移す方法の双方で、面積の倍率 a^4 と積分値 $4/3$ を照合した。積分は本文中へ押し込まず表示数式で追える形にした。

【第 3 問】

t の関数 $f(t)$ を $f(t) = 1 + 2at + b(2t^2 - 1)$ とおく。

区間 $-1 \leq t \leq 1$ のすべての t に対して $f(t) \geq 0$ であるような a, b を座標とする点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。

▶ 解法 1：端点と頂点の最小値を比較する

【方針】

$f(t) = 2bt^2 + 2at + 1 - b$ を区間 $[-1, 1]$ 上の 2 次式として扱う。 $b \leq 0$ なら上に凸なので最小は端点、 $b > 0$ なら下に凸なので端点条件に加えて、頂点が区間内に入る場合は頂点での値も見る。 $0 < b \leq \frac{1}{3}$ では端点条件だけで頂点条件も自動的に満たされ、 $b \geq \frac{1}{3}$ では頂点条件 $a^2 \leq 2b(1 - b)$ が境界になる。

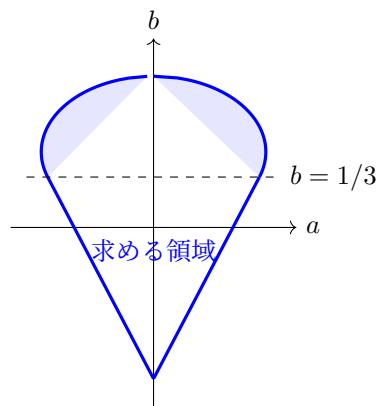
【解答】

与えられた関数は $f(t) = 2bt^2 + 2at + 1 - b$ である。

【 $b \leq 0$ の場合】このとき $f(t)$ は上に凸、または 1 次式である。区間 $[-1, 1]$ での最小値は端点のどちらかでとる。したがって $f(1) = 1 + b + 2a \geq 0$, $f(-1) = 1 + b - 2a \geq 0$ が必要十分である。これは $|a| \leq \frac{1+b}{2}$ を意味する。右辺が 0 以上でなければならないので、 $b \geq -1$ も必要である。よって $-1 \leq b \leq 0$, $|a| \leq \frac{1+b}{2}$ である。

【 $b > 0$ の場合】このとき $f(t)$ は下に凸である。まず端点で非負であるためには、同じく $|a| \leq \frac{1+b}{2}$ が必要である。頂点は $t = -\frac{a}{2b}$ である。 $0 < b \leq \frac{1}{3}$ では、端点条件 $|a| \leq \frac{1+b}{2}$ のもとで、頂点が区間内に入る場合にも $f\left(-\frac{a}{2b}\right) = 1 - b - \frac{a^2}{2b} \geq 0$ が自動的に成り立つ。実際、 $|a| \leq 2b$ なら $a^2 \leq 4b^2 \leq 2b(1 - b)$ である。したがって $0 < b \leq \frac{1}{3}$, $|a| \leq \frac{1+b}{2}$ でよい。 $b \geq \frac{1}{3}$ では、端点条件だけでは頂点で負になることがある。頂点が区間内にある範囲での条件は $1 - b - \frac{a^2}{2b} \geq 0$ すなわち $a^2 \leq 2b(1 - b)$ である。この条件が成り立つには $b \leq 1$ である。よって $\frac{1}{3} \leq b \leq 1$, $a^2 \leq 2b(1 - b)$ となる。

以上をまとめると、求める範囲は $-1 \leq b \leq \frac{1}{3}$, $|a| \leq \frac{1+b}{2}$ で表される部分と、 $\frac{1}{3} \leq b \leq 1$, $a^2 \leq 2b(1 - b)$ で表される部分の和集合である。図示では、前者は直線 $a = \pm \frac{1+b}{2}$ に挟まれた領域、後者は放物線型の境界 $a^2 = 2b(1 - b)$ の内側であり、両者は $b = \frac{1}{3}$ で滑らかにつながる。



▶ 解法 2：平方完成後に頂点の位置で分ける

【方針】

端点条件を先に $|a| \leq (1+b)/2$ とまとめる。 $b > 0$ では平方完成し、頂点が区間外なら端点条件、区間内なら頂点条件 $a^2 \leq 2b(1-b)$ を使う。二条件の境界が $b = 1/3$ で交わることを確認する。

【解答】

まず端点で非負であるための条件は

$$1 + b \pm 2a \geq 0, \quad \text{すなわち} \quad |a| \leq \frac{1+b}{2}.$$

したがって必ず $b \geq -1$ である。

$b \leq 0$ なら $f(t)$ は上に凸または 1 次式なので、端点条件だけで十分である。よって

$$-1 \leq b \leq 0, \quad |a| \leq \frac{1+b}{2}.$$

$b > 0$ なら

$$f(t) = 2b \left(t + \frac{a}{2b} \right)^2 + 1 - b - \frac{a^2}{2b}.$$

頂点が区間内にある条件は $|a| \leq 2b$ であり、その場合の条件は

$$a^2 \leq 2b(1-b).$$

一方、頂点が区間外なら最小値は端点でとるので、先の端点条件だけでよい。

$0 < b \leq 1/3$ では、頂点が区間内なら

$$a^2 \leq 4b^2 \leq 2b(1-b)$$

となり、端点条件だけで十分である。 $b \geq 1/3$ では頂点条件が境界となり、この条件から $b \leq 1$ も従う。

したがって求める領域は

$$-1 \leq b \leq \frac{1}{3}, \quad |a| \leq \frac{1+b}{2}$$

と

$$\frac{1}{3} \leq b \leq 1, \quad a^2 \leq 2b(1-b)$$

の和集合である。

【総評】 難度 7、計算量 6、目安時間 18 分。区間上の 2 次式の最小値を、端点と頂点に分けて調べる領域問題である。 $b \leq 0$ 、 $0 < b \leq 1/3$ 、 $1/3 \leq b \leq 1$ の境界を、頂点の位置と値から必要十分に導く。最終領域が a 軸方向に対称で、 $b = 1/3$ で二つの境界が連続することも図で確認する。

【第 4 問】

三つの実数 x, y, z のうち最大の数を $\max(x, y, z)$ で表し、最小の数を $\min(x, y, z)$ で表す。いま、次の条件をみたす x, y, z を座標とする点全体の集合を R とする。

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

$$\max(x, y, z) \leq a$$

$$x + y + z - \min(x, y, z) \leq a + b$$

R の体積を求めよ。ただし、 a, b は定数で、 $a > b > 0$ とする。

▶ 解法 1：座標の順序を固定して積分する

【方針】

条件 $x + y + z - \min(x, y, z) \leq a + b$ は、3 数のうち大きい 2 つの和が $a + b$ 以下であることを表す。領域は座標の入れ替えで対称なので、 $0 \leq z \leq y \leq x \leq a$ の部分を計算して 6 倍する。この順序では条件は $x + y \leq a + b$ 。 $y \leq b$ では上限が $x = a$ 、 $b \leq y \leq \frac{a+b}{2}$ では上限が $x = a + b - y$ に変わる。

【解答】

条件 $\max(x, y, z) \leq a$ と非負条件から $0 \leq x, y, z \leq a$ である。また $x + y + z - \min(x, y, z)$ は、3 数のうち大きい方から 2 つの和である。したがって R は、立方体 $0 \leq x, y, z \leq a$ の中で、大きい 2 つの和が $a + b$ 以下となる部分である。

領域は x, y, z の入れ替えに関して対称である。境界面上の重なりは体積に影響しないので、 $0 \leq z \leq y \leq x \leq a$ の部分を求めて 6 倍する。この部分では大きい 2 つは x, y なので、条件は $x + y \leq a + b$ である。

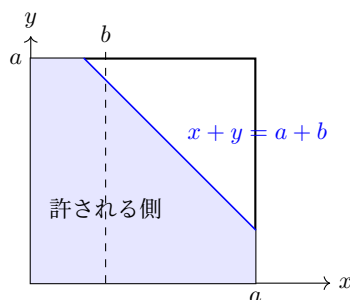
固定した y に対して、 z は $0 \leq z \leq y$ を動くので長さは y である。また x は $y \leq x \leq a$ 、 $x \leq a + b - y$ を満たす。ここで $a + b - y \geq a$ となるのは $y \leq b$ のときである。よって順序を固定した部分の体積は

$$\int_0^b \int_y^a y \, dx \, dy + \int_b^{(a+b)/2} \int_y^{a+b-y} y \, dx \, dy$$

である。これを計算すると

$$\begin{aligned} & \int_0^b y(a - y) \, dy + \int_b^{(a+b)/2} y(a + b - 2y) \, dy \\ &= \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3b^3}{24}. \end{aligned}$$

したがって全体の体積はこの 6 倍で、 $V = \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3b^3}{4}$ である。



▶ 解法 2：立方体から禁止領域を包除する

【方針】

領域は立方体 $[0, a]^3$ のうち全ての二数の和が $a + b$ 以下となる部分である。補集合を $x + y > a + b$ 、 $y + z > a + b$ 、 $z + x > a + b$ の和集合として、単独・二重・三重の体積を包除原理で計算する。

【解答】

$d = a - b > 0$ とおく。 R の補集合を立方体 $0 \leq x, y, z \leq a$ 内で

$$E_{xy} = \{x + y > a + b\}, \quad E_{yz}, \quad E_{zx}$$

の和集合として表す。

まず E_{xy} の xy 平面上の断面は、一辺 d の直角二等辺三角形である。したがって

$$|E_{xy}| = \frac{ad^2}{2}.$$

また $E_{xy} \cap E_{xz}$ では、固定した x に対し

$$b < x < a, \quad a + b - x < y, z < a$$

だから

$$|E_{xy} \cap E_{xz}| = \int_b^a (x - b)^2 dx = \frac{d^3}{3}.$$

三つの事象の共通部分では

$$u = a - x, \quad v = a - y, \quad w = a - z$$

とおくと

$$u + v < d, \quad v + w < d, \quad w + u < d$$

となる。 u を固定した vw 断面の面積を分けて積分すると

$$\begin{aligned} |E_{xy} \cap E_{yz} \cap E_{zx}| &= \int_0^{d/2} \left\{ (d - u)^2 - \frac{(d - 2u)^2}{2} \right\} du \\ &\quad + \int_{d/2}^d (d - u)^2 du \\ &= \frac{d^3}{4}. \end{aligned}$$

包除原理より補集合の体積は

$$3 \cdot \frac{ad^2}{2} - 3 \cdot \frac{d^3}{3} + \frac{d^3}{4} = \frac{3ad^2}{2} - \frac{3d^3}{4}.$$

よって

$$\begin{aligned} V &= a^3 - \frac{3a(a - b)^2}{2} + \frac{3(a - b)^3}{4} \\ &= \frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3b^3}{4}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 8、計算量 8、目安時間 24 分。最小値を引いた式が大きい 2 数の和になると読むことが出発点である。順序を固定する積分と、立方体の禁止領域を包除する方法で体積を相互確認した。積分範囲の切替点 $y = b$ 、三重共通部分の断面、対称性の係数 6 が主要な監査点である。