

入 学 試 験 問 題

数 学



東 京 大 学 1987 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 6 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 8 ページあり、問題は全部で 6 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す xy 平面の一次変換が、直線 $y = 2x + 1$ を直線 $y = -3x - 1$ へうつすとする．点 $P(1, 2)$ がうつる点を Q とし、原点を O とするとき、二直線 OP と OQ のなす角の大きさを求めよ．

第 2 問

点 (x, y) を点 $(x + a, y + b)$ にうつす平行移動によって曲線 $y = x^2$ を移動して得られる曲線を C とする. C と曲線 $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ が接するような a, b を座標とする点 (a, b) の存在する範囲の概形を図示せよ.

また, この二曲線が接する点以外に共有点を持たないような a, b の値を求めよ. ただし, 二曲線がある点で接するとは, その点で共通の接線を持つことである.

第 3 問

xyz 空間内の点 $P(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面 K がある.

K 上の点 $Q(a, b, c)$ が条件 $a > 0$, $b > 0$, $c > 1$ のもとで K 上を動くとき, Q において K に接する平面を L とし, L が x 軸, y 軸, z 軸と交わる点をそれぞれ A , B , C とする. このような三角形 ABC の面積の最小値を求めよ.

第 4 問

xyz 空間において、点 P は yz 平面上の放物線 $z = 1 - y^2$ 上にあるとする。点 $A(1, 0, 1)$ と P を結ぶ直線を x 軸のまわりに回転して得られる曲面と二平面 $x = 0$, $x = 1$ とによって囲まれる部分の体積を V とする。 V を P の y 座標で表せ。また V の最小値を求めよ。

第 5 問

n を 2 以上の自然数とする. $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ および $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ を満足する数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ および $y_1, y_2, \cdots, y_n$ が与えられている. $y_1, y_2, \cdots, y_n$ を並べかえて得られるどのような数列 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ に対しても

$$\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2$$

が成り立つことを証明せよ.

第 6 問

正六角形の頂点に 1 から 6 までの番号を順につける．また n 個のサイコロを振り，出た目を番号とするすべての頂点にしるしをつけるものとする．このとき，しるしのついた三点を頂点とする直角三角形が存在する確率を p_n とする．

- (1) p_3, p_4 を求めよ．
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n)$ を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)