

東京大学 1987 年度 理系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す xy 平面の一次変換が、直線 $y = 2x + 1$ を直線 $y = -3x - 1$ へうつすとする。点 $P(1, 2)$ がうつる点を Q とし、原点を O とするとき、二直線 OP と OQ のなす角の大きさを求めよ。

▶ 解法 1：直線上の 2 点の像から変換を決める

【方針】

与えられた行列は原点を中心とする拡大回転型の 1 次変換であるが、まずは直線上の 2 点を使って a, b を決める。直線 $y = 2x + 1$ 上の点 $(0, 1), (1, 3)$ の移る先が、直線 $y = -3x - 1$ 上にある条件を立てる。 a, b が決まれば $P(1, 2)$ の移る点 Q を計算し、内積で $\angle POQ$ を求める。

【解答】

直線 $y = 2x + 1$ 上の 2 点 $(0, 1), (1, 3)$ を考える。1 次変換は直線を直線に移すので、この 2 点の移る先が直線 $y = -3x - 1$ 上にあればよい。

点 $(0, 1)$ は $(-b, a)$ に移る。これが $y = -3x - 1$ 上にあるから $a = -3(-b) - 1 = 3b - 1$ である。

点 $(1, 3)$ は $(a - 3b, b + 3a)$ に移る。これも $y = -3x - 1$ 上にあるので $b + 3a = -3(a - 3b) - 1$ である。整理すると $6a - 8b + 1 = 0$ である。 $a = 3b - 1$ を代入して $6(3b - 1) - 8b + 1 = 0$ より $10b - 5 = 0$ となる。したがって $a = b = \frac{1}{2}$ である。

点 $P(1, 2)$ の移る点 Q は

$$Q = \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2, \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

である。よって

$$\overrightarrow{OP} = (1, 2), \quad \overrightarrow{OQ} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

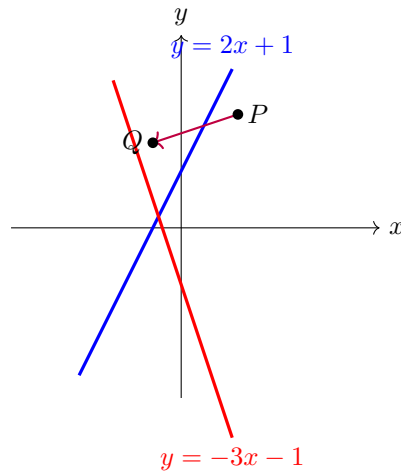
であり、

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

である。また $|OP| = \sqrt{5}, \quad |OQ| = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ だから

$$\cos \angle POQ = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。したがって求める角は $\frac{\pi}{4}$ である。



▶ 解法 2：直線の方程式を変換して回転角を読む

【方針】

変換後の座標を (X, Y) とし、逆変換で元の直線 $y - 2x - 1 = 0$ を書き換える。得られる直線が $3X + Y + 1 = 0$ と係数比例する条件から a, b を決める。最後は行列が表す回転角を直接読む。

【解答】

変換後の座標を

$$X = ax - by, \quad Y = bx + ay$$

とする。直線が直線へ移るので $a^2 + b^2 \neq 0$ であり、逆に

$$x = \frac{aX + bY}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-bX + aY}{a^2 + b^2}$$

と書ける。元の直線 $y - 2x - 1 = 0$ は

$$(-b - 2a)X + (a - 2b)Y - (a^2 + b^2) = 0$$

へ移る。これが

$$3X + Y + 1 = 0$$

と同じ直線だから、ある 0 でない実数 k により

$$-b - 2a = 3k, \quad a - 2b = k, \quad -(a^2 + b^2) = k$$

である。最初の二式から $a = b$ 、さらに $k = -a$ である。第 3 式より

$$-2a^2 = -a.$$

$a \neq 0$ なので $a = b = 1/2$ を得る。

この変換は複素数でいえば $1/2 + i/2$ を掛ける変換と同じで、長さを $1/\sqrt{2}$ 倍し、正の向きに $\pi/4$ 回転する。したがって任意の半直線とその像のなす小さい角は

$$\frac{\pi}{4}$$

であり、特に $\angle POQ = \pi/4$ である。

【総評】 難度 5、計算量 5、目安時間 12 分。原問題が行列による一次変換を明示しているため、行列を用いる。直線上の 2 点の像から係数を決める方法と、直線方程式そのものを逆変換する方法で $a = b = 1/2$ を確認した。最後は内積または拡大回転の角から $\pi/4$ を得る。

【第 2 問】

点 (x, y) を点 $(x + a, y + b)$ にうつす平行移動によって曲線 $y = x^2$ を移動して得られる曲線を C とする. C と曲線 $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ が接するような a, b を座標とする点 (a, b) の存在する範囲の概形を図示せよ.

また, この二曲線が接する点以外に共有点を持たないような a, b の値を求めよ. ただし, 二曲線がある点で接するとは, その点で共通の接線を持つことである.

▶ 解法 1: 接点を媒介変数にする

【方針】

平行移動後の放物線は $y = (x - a)^2 + b$ である. 接点を $(t, \frac{1}{t})$, $t > 0$ とおき, 値の一致と接線の傾きの一致を立てて a, b を t で表す. 存在範囲はこの媒介変数表示の曲線であり, $t \rightarrow 0+$, $t = 1$, $t \rightarrow \infty$ の挙動を押さえて概形を描く. 接点以外の共有点の有無は, 共有点を与える 3 次方程式を $(x - t)^2$ で割った残りの根で判定する.

【解答】

平行移動後の放物線 C は $y = (x - a)^2 + b$ である. C と $y = \frac{1}{x}$ が $(t, \frac{1}{t})$ で接するとする. ただし $t > 0$ である.

値が一致する条件は $(t - a)^2 + b = \frac{1}{t}$ である. また傾きが一致する条件は $2(t - a) = -\frac{1}{t^2}$ である. 後者より $a = t + \frac{1}{2t^2}$ であり, これを前者に代入すると $b = \frac{1}{t} - \frac{1}{4t^4}$ となる. したがって存在範囲は

$$a = t + \frac{1}{2t^2}, \quad b = \frac{1}{t} - \frac{1}{4t^4} \quad (t > 0)$$

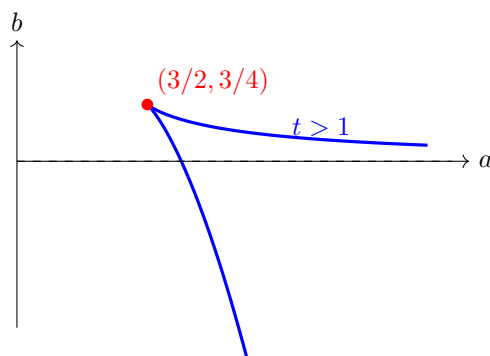
で表される曲線である.

概形を確認する. $t \rightarrow 0+$ では $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow -\infty$ である. $t = 1$ では $(a, b) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ であり, $t \rightarrow \infty$ では $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow 0+$ である. また

$$\frac{da}{dt} = 1 - \frac{1}{t^3}, \quad \frac{db}{dt} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^5}$$

なので, $t = 1$ で a は最小, b は最大になる. したがって曲線は右下から上がって $(\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ に達し, その後, 右へ下がりながら $b = 0$ に近づく.

次に, 接点以外の共有点を調べる. 共有点の x 座標は $x\{(x - a)^2 + b\} - 1 = 0$ を満たす. 上で得た a, b を代入すると $x\{(x - a)^2 + b\} - 1 = \frac{(x - t)^2(t^2x - 1)}{t^2}$ と因数分解される. $x = t$ は接点なので重解であり, 残りの共有点の候補は $x = \frac{1}{t^2}$ である. 接点以外に共有点を持たないためには, この根が接点の x 座標と一致すればよい. すなわち $\frac{1}{t^2} = t$ である. $t > 0$ より $t = 1$ となる. よって $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{4}$ である.



▶ 解法 2：二曲線の差の極値として接触を捉える

【方針】

関数 $h_a(x) = 1/x - (x-a)^2$ を考えると、放物線との共有点は $h_a(x) = b$ 、接触は $h'_a(x) = 0$ に対応する。停留点を t として a, b を求め、水平線 $y = b$ との残りの交点を因数分解で判定する。

【解答】

$x > 0$ で

$$h_a(x) = \frac{1}{x} - (x-a)^2$$

とおく。二曲線の共有点は $h_a(x) = b$ を満たし、接する点ではさらに $h'_a(x) = 0$ である。接点を $x = t > 0$ とすると

$$-\frac{1}{t^2} - 2(t-a) = 0$$

より

$$a = t + \frac{1}{2t^2}.$$

また

$$b = h_a(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{4t^4}.$$

したがって存在範囲は

$$(a, b) = \left(t + \frac{1}{2t^2}, \frac{1}{t} - \frac{1}{4t^4} \right) \quad (t > 0)$$

で表される曲線である。

$$\frac{da}{dt} = 1 - \frac{1}{t^3}, \quad \frac{db}{dt} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^5}$$

なので、 $t = 1$ で a は最小、 b は最大となる。両端の極限と合わせると、曲線は右下から $(3/2, 3/4)$ へ上がり、その後は右へ進みながら $b = 0$ の上側へ近づく。

共有点の方程式へ上の a, b を代入すると

$$x\{(x-a)^2 + b\} - 1 = \frac{(x-t)^2(t^2x-1)}{t^2}.$$

正の根 $x = 1/t^2$ が接点 $x = t$ と一致するときに限って、接点以外の共有点がない。よって $t^3 = 1$ 、すなわち $t = 1$ であり

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{3}{4}.$$

【総評】 難度 7、計算量 7、目安時間 21 分。接点の座標を媒介変数にする方法と、二曲線の差の停留値として接触を捉える方法で軌跡を相互確認した。概形には両端の極限、 $t = 1$ での折返し、 $b = 0$ への近づき方を反映する。後半は残りの正の根が接点と一致する必要十分条件まで書く。

【第 3 問】

xyz 空間内の点 $P(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面 K がある。

K 上の点 $Q(a, b, c)$ が条件 $a > 0, b > 0, c > 1$ のもとで K 上を動くとき、 Q において K に接する平面を L とし、 L が x 軸、 y 軸、 z 軸と交わる点をそれぞれ A, B, C とする。このような三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。

▶ 解法 1：四面体の体積を介して面積を求める

【方針】

球面の接平面を、半径 PQ を法線にもつ平面として求める。軸との切片を出したら、三角形 ABC の面積を直接計算する代わりに、四面体 $OABC$ の体積と、原点から接平面までの距離を使う。固定した c では $a^2 + b^2 = c(2 - c)$ のもとで ab を最大にすると面積が最小になる。最後は $1 < c < 2$ の 1 変数不等式に帰着する。

【解答】

球面 K は $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ である。点 $Q(a, b, c)$ はこの球面上にあるので $a^2 + b^2 + (c - 1)^2 = 1$ を満たす。また条件より $a > 0, b > 0, c > 1$ である。 Q における接平面 L は、半径方向のベクトル $(a, b, c - 1)$ を法線にもつ。したがって $a(x - a) + b(y - b) + (c - 1)(z - c) = 0$ である。これを整理し、 $a^2 + b^2 + (c - 1)^2 = 1$ を用いると $ax + by + (c - 1)z = c$ となる。

この平面と各軸との交点は

$$A = \left(\frac{c}{a}, 0, 0\right), \quad B = \left(0, \frac{c}{b}, 0\right), \quad C = \left(0, 0, \frac{c}{c-1}\right)$$

である。四面体 $OABC$ の体積は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{c-1} = \frac{c^3}{6ab(c-1)}$$

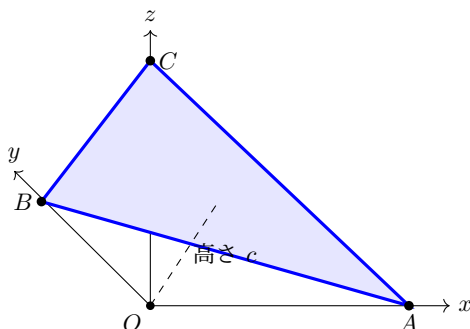
である。一方、原点から平面 L までの距離は、法線ベクトルの長さが 1 であるため c である。したがって $\frac{1}{3}[ABC] \cdot c = \frac{c^3}{6ab(c-1)}$ より $[ABC] = \frac{c^2}{2ab(c-1)}$ を得る。

ここで $a^2 + b^2 = 1 - (c - 1)^2 = c(2 - c)$ であり、 $a, b > 0$ だから $1 < c < 2$ である。固定した c に対して $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{c(2 - c)}{2}$ である。等号は $a = b$ のときである。よって

$$[ABC] \geq \frac{c^2}{2 \cdot \frac{c(2-c)}{2} \cdot (c-1)} = \frac{c}{(c-1)(2-c)}$$

である。

あとは $G(c) = \frac{c}{(c-1)(2-c)}$ ($1 < c < 2$) の最小値を求めればよい。逆数を考えると $\frac{1}{G(c)} = \frac{(c-1)(2-c)}{c} = 3 - c - \frac{2}{c}$ である。 $c > 0$ に対して $c + \frac{2}{c} \geq 2\sqrt{2}$ であり、等号は $c = \sqrt{2}$ のときである。したがって $\frac{1}{G(c)} \leq 3 - 2\sqrt{2}$ であり、 $G(c) \geq \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}$ である。等号は $c = \sqrt{2}$ 、かつ $a = b$ のときに成り立つ。よって面積の最小値は $3 + 2\sqrt{2}$ である。



▶ 解法 2：接平面の射影面積を使う

【方針】

接平面の単位法線は $(a, b, c-1)$ である。三角形 ABC の xy 平面への正射影は三角形 ABO なので、射影面積と法線の z 成分から面積を求める。後半は $a^2 + b^2 = c(2-c)$ と相加相乗平均で最小化する。

【解答】

接平面は

$$ax + by + (c-1)z = c$$

であり、その法線 $(a, b, c-1)$ の長さは球の半径と同じ 1 である。各軸との交点は

$$A = \left(\frac{c}{a}, 0, 0\right), \quad B = \left(0, \frac{c}{b}, 0\right), \quad C = \left(0, 0, \frac{c}{c-1}\right).$$

三角形 ABC を xy 平面へ正射影すると、 C は原点 O へ移るので三角形 ABO になる。その面積は

$$[ABO] = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c^2}{2ab}.$$

接平面の単位法線と z 軸方向のなす角の余弦は $c-1 > 0$ である。射影面積の関係から

$$[ABO] = (c-1)[ABC],$$

したがって

$$[ABC] = \frac{c^2}{2ab(c-1)}.$$

球面条件から

$$a^2 + b^2 = c(2-c), \quad 1 < c < 2.$$

固定した c では

$$2ab \leq a^2 + b^2 = c(2-c)$$

であり、等号は $a = b$ のときである。よって

$$[ABC] \geq \frac{c}{(c-1)(2-c)}.$$

さらに

$$\frac{(c-1)(2-c)}{c} = 3 - c - \frac{2}{c} \leq 3 - 2\sqrt{2}$$

で、等号は $c = \sqrt{2}$ のときである。したがって

$$[ABC] \geq \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

全ての等号条件は両立するので、最小値は $3 + 2\sqrt{2}$ である。

【総評】 難度 8、計算量 7、目安時間 24 分。接平面の切片を求めた後、四面体の体積または正射影面積を介して三角形の面積を出す。原問題は行列を扱わないため行列式・外積は使わない。 ab の最大化と c の一変数評価で全ての等号条件が両立し、最小値 $3 + 2\sqrt{2}$ が実現することまで確認する。

【第 4 問】

xyz 空間において、点 P は yz 平面上の放物線 $z = 1 - y^2$ 上にあるとする。点 $A(1, 0, 1)$ と P を結ぶ直線を x 軸のまわりに回転して得られる曲面と二平面 $x = 0$, $x = 1$ とによって囲まれる部分の体積を V とする。 V を P の y 座標で表せ。また V の最小値を求めよ。

▶ 解法 1：回転断面の半径を座標で表す

【方針】

P の y 座標を u とおくと $P = (0, u, 1 - u^2)$ である。線分 AP 上の点を x 座標で表し、 x 軸のまわりに回転したときの断面半径の 2 乗を $y^2 + z^2$ として積分する。最後は得られた $V = \frac{\pi}{3}(u^4 - 2u^2 + 3)$ を平方完成して最小値を読む。

【解答】

点 P の y 座標を u とおく。 P は yz 平面上の放物線 $z = 1 - y^2$ 上にあるから $P = (0, u, 1 - u^2)$ である。

点 $A(1, 0, 1)$ と P を結ぶ線分上で、 x 座標が x の点を考える。 $0 \leq x \leq 1$ に対して、この点は $(x, (1 - x)u, 1 - (1 - x)u^2)$ である。これを x 軸のまわりに回転すると、 x で切った断面は円であり、その半径の 2 乗は $(1 - x)^2 u^2 + \{1 - (1 - x)u^2\}^2$ である。

したがって体積は

$$V = \pi \int_0^1 [(1 - x)^2 u^2 + \{1 - (1 - x)u^2\}^2] dx$$

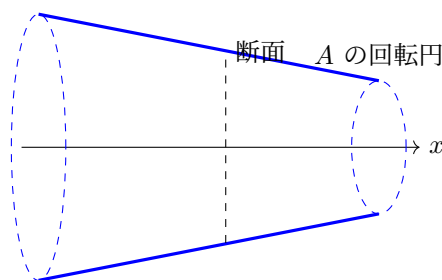
である。 $s = 1 - x$ と見て計算すると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{s^2 u^2 + (1 - s u^2)^2\} ds \\ &= \int_0^1 \{1 - 2s u^2 + s^2(u^4 + u^2)\} ds \\ &= 1 - u^2 + \frac{u^4 + u^2}{3} \\ &= \frac{1}{3}(u^4 - 2u^2 + 3). \end{aligned}$$

よって $V = \frac{\pi}{3}(u^4 - 2u^2 + 3)$ である。ここで u は P の y 座標である。

さらに $u^4 - 2u^2 + 3 = (u^2 - 1)^2 + 2$ だから、最小値は $u^2 = 1$ のときにとり、 $V_{\min} = \frac{2\pi}{3}$ である。

P の回転円



▶ 解法 2：平面ベクトルの補間公式で積分する

【方針】

線分 PA の yz 成分を二つの平面ベクトルの一次補間と見る。二乗ノルムの積分公式を展開して確かめ、断面積を一度に積分する。

【解答】

$P = (0, u, 1 - u^2)$ 、 $A = (1, 0, 1)$ とする。 yz 平面内の二つのベクトルを

$$\mathbf{p} = (u, 1 - u^2), \quad \mathbf{q} = (0, 1)$$

とおく。線分上で x 座標が x の点の yz 成分は

$$(1 - x)\mathbf{p} + x\mathbf{q}$$

である。したがって回転断面の面積は、その長さの 2 乗に π を掛けたものである。

展開して積分すると、任意の平面ベクトルについて

$$\int_0^1 |(1 - x)\mathbf{p} + x\mathbf{q}|^2 dx = \frac{1}{3} (|\mathbf{p}|^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + |\mathbf{q}|^2).$$

ここで

$$|\mathbf{p}|^2 = u^2 + (1 - u^2)^2, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 1 - u^2, \quad |\mathbf{q}|^2 = 1.$$

よって

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \{u^2 + (1 - u^2)^2 + (1 - u^2) + 1\} \\ &= \frac{\pi}{3} (u^4 - 2u^2 + 3). \end{aligned}$$

さらに

$$u^4 - 2u^2 + 3 = (u^2 - 1)^2 + 2$$

だから

$$V_{\min} = \frac{2\pi}{3}$$

であり、 $u = \pm 1$ のときに等号となる。

【総評】 難度 6、計算量 6、目安時間 17 分。線分上の yz 座標を正しく補間し、回転断面の半径の 2 乗が $y^2 + z^2$ であることを使う。座標の直接展開と平面ベクトルの二乗ノルム積分で $V = \pi(u^4 - 2u^2 + 3)/3$ を照合した。積分、平方完成、最小値は全て表示数式で追える。

【第 5 問】

n を 2 以上の自然数とする. $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ および $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ を満足する数列 $x_1, x_2, \dots, x_n$ および $y_1, y_2, \dots, y_n$ が与えられている. $y_1, y_2, \dots, y_n$ を並べかえて得られるどのような数列 $z_1, z_2, \dots, z_n$ に対しても

$$\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2$$

が成り立つことを証明せよ.

▶ 解法 1：逆順の 2 項を交換して整列する

【方針】

並べ替えられた z に、順序が逆になっている 2 項 $i < j$, $z_i < z_j$ があるとき、その 2 項を交換する. $x_i \geq x_j$ を使うと、交換後の二乗和は交換前以下になる. したがって順序の入れ替わりを 1 つずつ直していけば和は増えず、最後に z は降順、すなわち与えられた y の並びになる.

【解答】

任意の並べ替え $z_1, z_2, \dots, z_n$ を考える. もしある $i < j$ について $z_i < z_j$ となっていれば、この 2 項の順序は $x_i \geq x_j$ とは逆になっている. この 2 項だけを交換したとき、二乗和の変化を調べる.

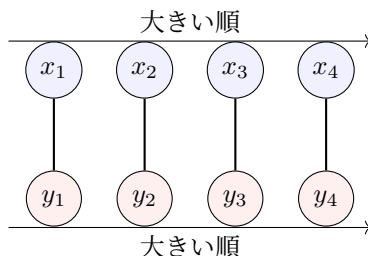
交換前の該当部分は $(x_i - z_i)^2 + (x_j - z_j)^2$ であり、交換後は $(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2$ である. 差を計算すると

$$\begin{aligned} & \{(x_i - z_i)^2 + (x_j - z_j)^2\} - \{(x_i - z_j)^2 + (x_j - z_i)^2\} \\ &= 2(x_i - x_j)(z_j - z_i). \end{aligned}$$

ここで $x_i \geq x_j$, $z_j > z_i$ だから $2(x_i - x_j)(z_j - z_i) \geq 0$ である. したがって、この交換を行うと二乗和は増えない.

この操作を、 z の中で順序が逆になっている 2 項がなくなるまで繰り返す. 各交換で二乗和は増えず、最終的には $z_1 \geq z_2 \geq \cdots \geq z_n$ となる. ところが $z_1, \dots, z_n$ は $y_1, \dots, y_n$ の並べ替えであり、もともと $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ だから、最終的な並びは $y_1, y_2, \dots, y_n$ である.

よって任意の並べ替え z に対して $\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2$ が成り立つ.



▶ 解法 2：最大の項を固定して帰納法で示す

【方針】

二乗和を最小にする並べ方一つ取る。最大の x_1 に最大の y_1 が対応していなければ、その二つの対応先を交換して和が増えないことを示す。 x_1, y_1 を固定した後、残る $n-1$ 項に同じ議論を適用する。

【解答】

n に関する帰納法で示す。 $n=2$ のときは

$$\begin{aligned} & (x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2 \\ & \quad - \{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\} \\ & = 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geq 0 \end{aligned}$$

だから成り立つ。

$n-1$ 項まで成り立つと仮定する。任意の並べ替え $z_1, \dots, z_n$ の中で、 y_1 が k 番目にあるとする。 z_1 と $z_k = y_1$ を交換したとき、交換前から交換後を引くと

$$2(x_1 - x_k)(y_1 - z_1) \geq 0$$

である。したがって、 y_1 を x_1 に対応させても二乗和は増えない。

残る $x_2, \dots, x_n$ と $y_2, \dots, y_n$ はいずれも降順である。帰納法の仮定により、この残りも同じ順に対応させたとき二乗和が最小になる。よって全体でも

$$\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \leq \sum_{j=1}^n (x_j - z_j)^2$$

が成り立つ。

【総評】 難度 6、計算量 5、目安時間 16 分。交換法では逆順の 2 項を直したとき二乗和が増えないことと、有限回で降順に到達することを書く。帰納法では最大項同士を対応させても悪化しないことを示し、残る項へ帰納法を適用する。原問題に行列はなく、二つの証明はいずれも展開と順序だけで完結する。

【第 6 問】

正六角形の頂点に 1 から 6 までの番号を順につける。また n 個のサイコロを振り、出た目を番号とするすべての頂点にしるしをつけるものとする。このとき、しるしのついた三点を頂点とする直角三角形が存在する確率を p_n とする。

(1) p_3, p_4 を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n)$ を求めよ。

▶ 解法 1：余事象を上下から挟む

【方針】

正六角形の円周上の 3 点が直角三角形を作るのは、その 3 点の中に対頂点の組が含まれるときである。ただし、印が 2 点以下では三角形を作れない。(1) では $n=3, 4$ を順序付きの出目として数える。(2) では余事象、つまり直角三角形が存在しない場合を考える。指数的に最も大きく残るのは、3 組の対頂点から高々 1 点ずつ選んだ 3 点集合の中に全出目が入る場合であり、比率は $(3/6)^n$ になる。

【解答】

正六角形の頂点は同一円周上にある。円周上の 3 点でできる三角形が直角三角形になるのは、3 点のうち 2 点に対頂点、すなわち直径の両端になっているときである。したがって、印のついた頂点の集合が対頂点の組を含み、かつ印のついた頂点が 3 点以上あれば、直角三角形が存在する。

(1) まず $n=3$ を数える。3 回の出目で直角三角形ができるには、3 つの出目がすべて異なり、その中に対頂点の組が 1 組含まれればよい。対頂点の組は 3 通り、残りの 1 点はその組以外の 4 点から選べる。さらに 3 個の出目の順序があるので、条件を満たす出方は $3 \cdot 4 \cdot 3! = 72$ 通りである。全体は 6^3 通りだから $p_3 = \frac{72}{6^3} = \frac{1}{3}$ である。

次に $n=4$ を数える。全体は 6^4 通りである。直角三角形が存在しない場合を数える。印のついた頂点が 1 点だけの場合は 6 通り、2 点だけの場合は、2 点の選び方が ${}_6C_2$ 通りで、それぞれ 4 回の出目が両方を少なくとも 1 回ずつ含むので

${}_6C_2(2^4 - 2)$ 通りである。印が 3 点以上で直角三角形が存在しないためには、3 組の対頂点から高々 1 点ずつ選ばれていなければならない。3 点ちょうどの場合、各対頂点の組から 1 点ずつ選ぶので集合は 2^3 通りあり、4 回の出目がその 3 点すべてを含む出方は $3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 = 36$ 通りである。したがって余事象の数は $6 + {}_6C_2(2^4 - 2) + 2^3 \cdot 36 = 6 + 15 \cdot 14 + 288 = 504$ である。よって条件を満たす出方は $6^4 - 504 = 1296 - 504 = 792$ 通りであり、 $p_4 = \frac{792}{6^4} = \frac{11}{18}$ である。

(2) $1 - p_n$ は、直角三角形が存在しない確率である。直角三角形が存在しないためには、印のついた頂点集合が対頂点の組を含まないか、印のついた頂点が 2 点以下でなければならない。

出目がすべて、対頂点を同時に含まない 3 点集合の中に入る場合を考える。3 組の対頂点から 1 点ずつ選ぶと、そのような 3 点集合は $2^3 = 8$ 通りあり、それぞれについて出目がその 3 点内にすべて入る確率は $\left(\frac{3}{6}\right)^n$ である。したがって $1 - p_n$ は定数倍を除いて $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ の大きさで下からも上からも評価できる。

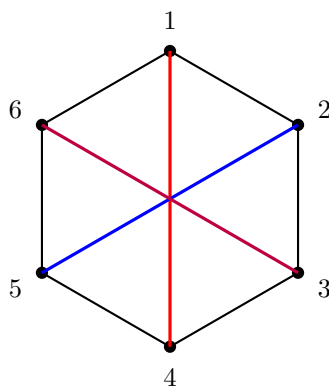
実際、ある固定した、対頂点を含まない 3 点集合にすべての出目が入る場合は余事象に含まれるので $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1 - p_n$ である。一方、余事象では、印が 3 点以上なら出目全体は対頂点を含まない 8 通りの 3 点集合のいずれかに入り、印が 2 点以下なら 15 通りの 2 点集合のいずれかに入る。和事象の確率で上から評価して

$$1 - p_n \leq 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 15 \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 23 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。よって

$$\log \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n} \log(1 - p_n) \leq \frac{\log 23}{n} + \log \frac{1}{2}$$

である。 $n \rightarrow \infty$ とすると両端が $\log \frac{1}{2}$ に近づくから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n) = -\log 2$ である。



3 組の対頂点

▶ 解法 2：余事象を正確に数えて一般式を得る

【方針】

直角三角形がないとき、印の種類数は 1、2、または各対頂点組から 1 点ずつ選んだ 3 である。使われた頂点集合の大きさに、全ての頂点が少なくとも一度出る列を包除原理で数え、 $1 - p_n$ の閉じた式を得る。

【解答】

直角三角形が存在しない出目列を、実際に印が付いた頂点数で分類する。

1 点だけなら出目列は 6 通りである。2 点ちょうどなら頂点集合は ${}_6C_2$ 通りで、両方が少なくとも一度出る列は $2^n - 2$ 通りだから

$$15(2^n - 2)$$

通りである。

3 点以上で対頂点の組を含まないためには、3 組の対頂点から 1 点ずつ選んだ 3 点を全て使う必要がある。その集合は $2^3 = 8$ 通りである。固定した 3 点が全て少なくとも一度出る列は、包除原理により

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

通りである。4 点以上を選べば必ず対頂点の組を含む。

したがって余事象の出目列数は

$$\begin{aligned} N_n &= 6 + 15(2^n - 2) + 8(3^n - 3 \cdot 2^n + 3) \\ &= 8 \cdot 3^n - 9 \cdot 2^n. \end{aligned}$$

よって

$$1 - p_n = 8 \left(\frac{1}{2} \right)^n - 9 \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

(1) これに $n = 3, 4$ を代入すると

$$p_3 = \frac{1}{3}, \quad p_4 = \frac{11}{18}.$$

(2) また

$$\frac{1}{n} \log(1 - p_n) = -\log 2 + \frac{1}{n} \log \left\{ 8 - 9 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}.$$

右辺第 2 項は 0 へ近づくので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(1 - p_n) = -\log 2.$$

【総評】 難度 8、計算量 7、目安時間 23 分。円周角の定理により、直角三角形の存在を「対頂点の組を含み、印が 3 点以上」と言い換える。上下からの指数評価と、使用頂点数別の正確な包除計数の双方で $p_3 = 1/3$ 、 $p_4 = 11/18$ 、極限 $-\log 2$ を確認した。重複を避けるため、正確な計数では「実際に使った頂点数」で分類する。