

東京大学 1990 年度 理系（後期）

解答

全 3 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面上の 4 点 $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,2)$, $C(0,2)$ を頂点とする正方形を Q とする. このとき, 次の条件を満たす xy 平面上の点 P の存在する範囲を図示し, その部分の面積を求めよ.

(条件) 点 P を通って, Q の面積 4 を 1 と 3 に切り分けるような直線を引くことができない.

【方針】

正方形の中心を原点に移し, 面積 1 の部分を切り取る直線の全体を考える. 点 P を通るそのような直線が存在しない領域は, 各方向の二本の面積四等分線にはさまれた中央部分の共通部分である. 対称性により第 1 象限だけを調べ, 切り取られる三角形の二辺の積が 2 であることから包絡線を求める.

【解答】

正方形の中心 $(1,1)$ を原点とする座標

$$X = x - 1, \quad Y = y - 1$$

を用いる. 正方形は $|X| \leq 1$, $|Y| \leq 1$ である.

面積 1 を切り取る直線を各方向に動かすと, その直線と中心に関して対称な直線との間にある点だけが, その方向では面積 1 の直線上に乗らない. すべての方向についてこの中央の帯に入る点が求める領域である.

対称性から $X \geq 0$, $Y \geq 0$ の部分を考える. 右上の頂点から上辺, 右辺に沿ってそれぞれ u, v だけ離れた二点を結ぶ直線が面積 1 の三角形を切り取る時

$$\frac{uv}{2} = 1, \quad uv = 2.$$

右上の頂点から測った座標を $\xi = 1 - X$, $\eta = 1 - Y$ とすると, この直線は

$$\frac{\xi}{u} + \frac{\eta}{v} = 1, \quad v = \frac{2}{u}$$

である. この直線族の境界では, 左辺を u で見たとき最小となるので

$$-\frac{\xi}{u^2} + \frac{\eta}{2} = 0.$$

二式から $\xi = u/2$, $\eta = 1/u$ を得て, 包絡線は

$$\xi\eta = \frac{1}{2}.$$

したがって求める範囲は

$$(1 - |x - 1|)(1 - |y - 1|) > \frac{1}{2}$$

である. 等号上の点には面積 1 と 3 に分ける直線が通るため, 境界は含まない. この不等式は自動的に正方形の内部の中央部分を表す.

第 1 象限部分では

$$0 \leq X < \frac{1}{2}, \quad 0 \leq Y < 1 - \frac{1}{2(1-X)}.$$

よって全体の面積は対称性から

$$4 \int_0^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2(1-X)}\right) dX = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 2\right).$$

したがって求める面積は

$$2 - 2 \log 2$$

である.

【総評】 目安は 30 分. 面積 1 の直線を一本ずつ探すのではなく, その直線族の「通らない中央核」を求める発想が最大の山場である. 右上の三角形の脚を u, v として $uv = 2$ を作り, 包絡線 $(1 - X)(1 - Y) = 1/2$ を導く部分が主要な採点点. 境界は条件を満たさないので厳密不等号にする.

【第 2 問】

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とし, P_0 を xy 平面上の原点とする. $i = 1, \dots, 6$ に対して, a_i を正の実数とし, $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = A^i \begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}$ とおいたとき, 点 P_i を $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = (x_i, y_i)$ となるように定める. ただし, このとき $P_6 = P_0$ となっているものとする. $P_0, P_1, \dots, P_6$ を順に結んで得られる六角形を H とおく.

- (1) $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$ であることを示せ.
- (2) $\sum_{i=1}^6 a_i = 6$, $a_1 - a_4 = 1$ とするとき, H の面積の最大値を求めよ.
- (3) $\sum_{i=1}^6 a_i = 6$ とするとき, H の面積の最大値を求めよ.

【方針】

行列 A は 60° 回転を表すので, 六辺の方向は順に 60° ずつ変わる. 閉じる条件を x, y 成分に分けて (1) を得る. (2)(3) では共通差 d と三つの基準長 x, y, z を導入し, 六角形の面積を二次式にして $xy + yz + zx \leq (x + y + z)^2/3$ を使う.

【解答】

(1)

第 i 辺の方向は正の x 軸を $i\pi/3$ だけ回転した方向である. $P_6 = P_0$ の y 成分から

$$a_1 + a_2 - a_4 - a_5 = 0,$$

したがって

$$a_1 - a_4 = a_5 - a_2.$$

また x 成分を 2 倍して

$$a_1 - a_2 - 2a_3 - a_4 + a_5 + 2a_6 = 0.$$

前式を代入すると

$$a_1 - a_4 = a_3 - a_6.$$

よって

$$a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6.$$

(2)

共通の差を d とし

$$x = a_4, \quad y = a_2, \quad z = a_6$$

とおくと

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (x + d, y, z + d, x, y + d, z).$$

六角形の面積を K とする. 各頂点を辺ベクトルの累積和で表し, 座標の面積公式で整理すると

$$\frac{K}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(xy + yz + zx) + \frac{d}{2}(x + y + z) + \frac{d^2}{4}.$$

$\sum a_i = 6$ より

$$x + y + z = 3 - \frac{3d}{2}.$$

固定した和に対し

$$xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3}$$

で, 等号は $x = y = z$ のときである. したがって

$$K \leq \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{d^2}{8} \right).$$

ここでは $d = 1$ なので

$$K_{\max} = \frac{11\sqrt{3}}{8}.$$

等号は $x = y = z = 1/2$ のときに実現する。

(3)

上の評価で d も動かすと

$$K \leq \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} - \frac{d^2}{8} \right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$d = 0$, $x = y = z = 1$ 、すなわち $a_1 = \cdots = a_6 = 1$ の正六角形で等号が実現する。よって

$$K_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【総評】 目安は 35 分。(1) は閉曲線条件を成分で書く基本点、(2)(3) は面積式の整理と等号条件が配点の中心である。差 d の対応を $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$ の順に正しく置くこと、最大値だけでなく正の辺長で等号が実現する例を示すことが重要。

【第 3 問】

長さ 1 の線分をつなげてできる右のような平面上の図形 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ を考える。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し、図形 Q_n の左端の点を A_n 、右端の点を B_n 、上端の点を C_n とする。

Q_1 は一辺の長さが 1 の正三角形の周である。 Q_2 は図のように、 Q_1 を 3 つつなげてできる図形である。

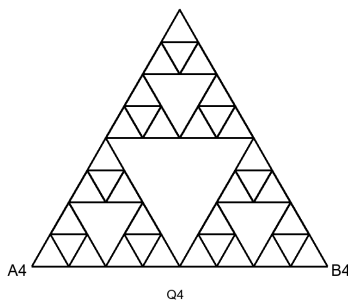
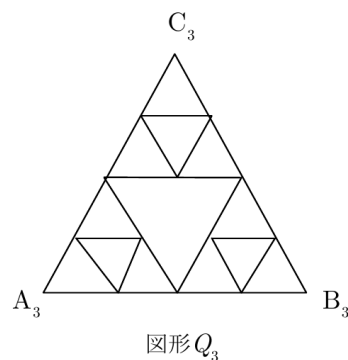
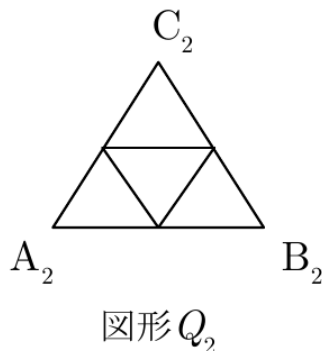
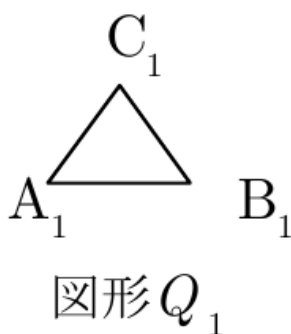
Q_n と同じ図形を 3 つ用意し、それらを $Q_n(1), Q_n(2), Q_n(3)$ とする。 $i = 1, 2, 3$ に対し、 $Q_n(i)$ の左端の点を $A_n(i)$ 、右端の点を $B_n(i)$ 、上端の点を $C_n(i)$ としたとき、 Q_{n+1} は、 $B_n(1)$ と $A_n(2)$ 、 $C_n(2)$ と $B_n(3)$ 、 $A_n(3)$ と $C_n(1)$ がそれぞれ同一の点になるようにおいてできる図形である。

Q_n において、 A_n から線分の上を通り、一度通った点は二度通らずに B_n まで行く行き方を考える。この行き方のうち、途中 C_n を通らない場合の個数を x_n とし、途中 C_n を通る場合の個数を y_n とする。容易にわかるように、 $x_n = y_n = 1$ である。

(1) x_2, y_2 を求めよ。

(2) x_{n+1} を x_n, y_n を用いて表せ。また、 y_{n+1} を x_n, y_n を用いて表わせ。

(3) x_3, y_3 を求めよ。



【方針】

三つの Q_n を大きな三角形の左下・右下・上に配置して考える。二頂点間の道を「残る頂点を通らない x_n 型」と「通る y_n 型」に分けたまま連結する。大きな図形で C_{n+1} を通るか否かごとに、三つの小図形で選ぶ型を列挙して漸化式を作る。

【解答】

(1)

Q_2 の六頂点からなる図で、同じ点を二度通らない道を列挙する。 A_2 から B_2 へ行く道は、 C_2 を通らないものが 7 通り、通るものが 3 通りである。したがって

$$x_2 = 7, \quad y_2 = 3.$$

(2)

三つの小図形 $Q_n(1), Q_n(2), Q_n(3)$ のそれぞれで、二つの端点を結ぶ道は、第三の端点を通らない x_n 型と、第三の端点を通る y_n 型に分かれる。

C_{n+1} を通らない道を、小図形ごとの型で分類すると、

$$x_n^3, \quad 2x_n^2y_n, \quad x_n^2, \quad 2x_ny_n, \quad y_n^2$$

に対応する場合が得られる。これらは連結点を通る順序が異なり、互いに重ならない。よって

$$x_{n+1} = x_n^3 + 2x_n^2y_n + x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2.$$

一方、 C_{n+1} を通る道は、上側の小図形で第三頂点を通る場合を同様に分けると

$$y_{n+1} = x_n^2y_n + 2x_ny_n^2 = x_ny_n(x_n + 2y_n).$$

(3)

$x_2 = 7, y_2 = 3$ を代入して

$$\begin{aligned} x_3 &= 7^3 + 2 \cdot 7^2 \cdot 3 + 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 3^2 \\ &= 343 + 294 + 49 + 42 + 9 = 737, \end{aligned}$$

$$y_3 = 7^2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \cdot 3^2 = 147 + 126 = 273.$$

したがって

$$x_3 = 737, \quad y_3 = 273.$$

【総評】 目安は 30 分。図を目で追うだけでは重複・漏れが起きるので、各 Q_n 内の道を x 型と y 型に固定して積で数えることが核心である。(2) の五つ・二つの型が互いに排反であることを連結点の通過順序で確認する。(3) は代入計算なので、ここを確実に得点する。